Soluções Periódicas de Equações Quase-Parabólicas com Mudanças Abruptas

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Janete Crema e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas. 08 de fevereiro de 1996

José Luiz Boldrini

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título Doutor em Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Crema, Janete

C862s Soluções periódicas de equações quase - parabólicas com mudanças abruptas. -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1996.

Orientador : José Luiz Boldrini

Dissertação (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Equações diferenciais não lineares. 2. Equaçoes diferenciais parabólicas. 3. Equaçoes diferenciais quase parabólicas*. 4. Soluções periódicas*. 5. Operador laplaciano. I.Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 08 de fevereiro de 1996
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

José Luiz Boldrini

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof (a). Dr (a). HILDEBRANDO MUNHOZ RODRIGUES

Prof (a). Dr (a). JOSE GASPAR RUAS FILHO

Prof (a). Dr (a). ALOISIO JOSE FREIRIA NEVES

Gustavo Perla Menzala

Prof (a). Dr (a). GUSTAVO PERLA MENZALA

Tese de Doutorado em Matemática

Soluções Periódicas de Equações Quase-Parabólicas com Mudanças Abruptas

Janete Crema
Autor

Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Orientador

Departamento de Matemática do IMECC - UNICAMP
1996

Dedicatória

Aos meus pais !

Agradecimentos

À Capes, ao Departamento de Matemática do ICMSC-USP e aos Departamentos de Matemática e Matemática Aplicada do IMECC-UNICAMP.

Ao colega, e futuro doutor, Marcelo Montenegro, pelas valiosas referências.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Luiz Boldrini, meu mais profundo agradecimento.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a existência de soluções periódicas de problemas quase-parabólicos, envolvendo por exemplo o operador p-Laplaceano, Δ_p, ou qualquer outro de comportamento similar a este, sob a ação de perturbações (não necessariamente pequenas) não lineares, não dissipativas e nem contínuas (no tempo). Estas perturbações podem, em alguns casos, não só envolver a solução como também as derivadas espaciais da solução, desde que sujeitas a certas condições de crescimento. São investigadas situações onde existem trocas periódicas tanto na parte principal da equação quanto nas perturbações externas, trocas estas que podem ocorrer de acordo com o comportamento da solução ou que serão pré-determinadas no tempo.

Índice

Introdução

Operadores monótonos não lineares, em particular aqueles que são subdiferenciais de funcionais convexos, como o p-Laplaceano, aparecem freqüentemente em várias situações, como por exemplo em equações que modelam o comportamento de materiais viscoelásticos (veja Le Tallec [9]). Estes operadores quando acompanhados de outros termos não lineares podem tornar a análise da equação complicada, bem como tornar difícil a previsão do comportamento da solução, uma vez que o operador resultante não será necessariamente monótono nem dissipativo, o que em termos físicos significa que a interação das forças internas e externas ao sistema pode tanto fornecer como retirar energia deste. Por isso não é claro se, ao se atuar com forças externas periódicas, a dissipação interna (provocada pelo operador monótono) seja suficiente para garantir que o sistema responda também de maneira periódica.

É óbvio que este tipo de questão também aparece quando a parte principal da equação é representada por um operador monótono e linear (caso semilinear) mas neste caso as técnicas disponíveis para se abordar o problema são mais numerosas do que para o caso não linear. Exemplos interessantes disto são dados nos trabalhos de P. Hess [7] - onde são encontradas soluções positivas de problemas uniformemente parabólicos baseados no problema elíptico associado - e M. Esteban [5] onde são encontradas soluções positivas de problemas uniformemente parabólicos superlineares com base no trabalho anterior.

Mas apesar de nossos recursos serem bem mais restritos e de termos encontrado na literatura somente resultados sobre problemas não lineares mas puramente monotônicos, foi possível obter a existência de soluções periódicas para uma série de problemas que permitem a atuação de operadores monótonos acompanhados por outros operadores não lineares - a este tipo de problema iremos nos referir por Problema Perturbado. Além disso permite-se que haja trocas abruptas de operadores, trocas estas que podem tanto depender do tempo t como da própria solução da equação.

Assim no primeiro capítulo, ambientados num espaço de Hilbert, procuramos soluções periódicas de equações que envolvem determinados operadores maximais monotônicos perturbados por operadores localmente lipschitzianos; além disso permitimos que houvessem trocas abruptas desses operadores, trocas estas pré-estabelecidas no tempo.

Matematicamente falando, o que fizemos foi encontrar condições suficientes sobre operadores maximais monotônicos A_i, $i = 1, 2$, para os quais o problema

$$(0.1) \begin{cases} u_t + A_1 u + B_1(t, u) \ni 0 & t \in (0, \bar{t}) \\ u_t + A_2 u + B_2(t, u) \ni 0 & t \in (\bar{t}, T) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

tivesse solução, onde B_i é operador localmente lipschitziano, em H, na segunda variável, $i = 1, 2$. Isso foi feito usando-se resultados de ponto fixo sobre a aplicação de Poincaré associada à equação acima.

No Capítulo 2, para que pudéssemos trabalhar com uma classe de perturbações $\{B_i(t, \cdot)\}$ maior que a classe dos operadores localmente lipschitzianos de H fomos obrigados a restringir um pouco mais a classe de operadores monotônicos a que A_i pudesse pertencer.

Assim num primeiro momento trabalhamos com o operador p_i-Laplaceano com condição de Dirichlet, cuja formulação variacional gera um operador $A_i = -\Delta_{p_i} : W_0^{1,p_i}(\Omega) \to W^{-1,p_i'}(\Omega)$, onde $p_i \geq 2$ e $\dfrac{1}{p_i} + \dfrac{1}{p_i'} = 1$ e Ω é aberto regular e limitado do $I\!R^N$ e mostramos que o problema abaixo tem solução:

$$(0.2) \begin{cases} u_t(t,x) - \Delta_{p_1} u(t,x) + m(t) g_1(u(t,x)) + h_1(t,x) = 0 & , t \in (0, \bar{t}), \\ u_t(t,x) - \Delta_{p_2} u(t,x) + m(t) g_2(u(t,x)) + h_2(t,x) = 0 & , t \in (\bar{t}, T), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & , t \in (0, T), \\ u(0,x) = u(T,x) & , x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $m \in L^\infty(0,T), h_1 \in L^{p_1'}(0, \bar{t}; W^{-1,p_1'}(\Omega))$, $h_2 \in L^{p_2'}(\bar{t}, T; N^{-1,p_2'}(\Omega)$ e g_i é função real, contínua e limitada por $|g_i(\sigma)| \leq a_i(|\sigma|^{s_i - 1} + 1)$ com $a_i \geq 0$, $0 \leq s_i < p_i - 1$, $\sigma \in I\!R$ e $i = 1, 2$.

Neste caso o que fizemos foi, através do método de Galerkin e de estimativas a priori, encontrar propriedades do Operador Solução associado à equação e, então, usando a teoria do Grau de Leray-Schauder provar que este operador tinha um ponto fixo. Na realidade este método pode ser facilmente estendido para uma situação abstrata que é descrita no Teorema 3.3.

Quando alguma função g_i tem crescimento limitado por s_i igual ou superior à $p_i - 1$ também obtivemos soluções fracas para (0.2) desde que $|m|_\infty$ fosse suficientemente pequeno e que $s_i \leq p_i - 1 + \tau_i(N, p_i)$ onde $\tau_i > 0$ é explicitado no Teorema 3.10. O caso $p_1 = p_2 = p$ é mostrado no Teorema 3.5 e a situação geral, por ser obtida de forma inteiramente análoga a este caso particular, tem sua demonstração omitida. Cabe observar que o número τ_i é determinado em função de certas imersões de Sobolev e por isso ainda não foi possível estender este resultado para uma situação abstrata. Mas mesmo assim são apresentados vários exemplos de operadores monótonos que podem substituir $-\Delta_p$ na equação (0.2) e que para o mesmo valor de τ fornecem soluções fracas. Todos estes resultados foram obtidos mostrando-se através do Teorema do Ponto Fixo de Schauder, que o Operador Solução associado a este problema admitia um ponto fixo.

De modo análogo ao caso descrito anteriormente, encontramos um limite superior para $s_i \geq p_i - 1$ para que (0.2) admitisse solução forte. Neste caso foi possível traçar um paralelo entre problemas não lineares envolvendo o operador Δ_p, com $p > 2$, com problemas semi-lineares envolvendo o operador de Laplace $-\Delta = -\Delta_2$. Como se esperava, pelo fato de Δ ser linear (e mantida a condição de pequenez sobre $|m|_\infty$) foi possível obter soluções fortes para (0.2) para crescimentos s_i "superiores" aos permitidos no caso $-\Delta_p, p > 2$. Veja Teorema 4.1 e observação subseqüente a este.

Mas existem situações físicas que, quando representadas matematicamente envolvem trocas de operadores não sob marcas pré-determinadas no tempo mas de acordo com o próprio comportamento da solução. Assim, ainda no segundo capítulo estudamos uma situação onde a troca de operadores se dá em função da norma da solução; esta situação é dada pelo Teorema 5.1.

E finalmente no Capítulo 3, estudamos um caso onde se permite que a perturbação seja função também do gradiente da solução. Usando o método de Galerkin mostramos no Teorema 1.1 que o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = h(t, \cdot) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} g_\ell(u) \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

tem solução, sob certas condições de regularidade e limitação sobre g_ℓ, $\ell = 1 \ldots N$.

Capítulo 1

Perturbações Lipschitzianas

Como dissemos na introdução, nosso objetivo é procurar soluções de problemas quase parabólicos, envolvendo operadores monótonos e perturbações que sofram mudanças abruptas no decorrer do tempo. Neste capítulo vamos estudar alguns problemas, sob o ponto de vista de espaços de Hilbert. Assim inicialmente recordaremos alguns fatos que serão de fundamental importância na elaboração de nossos resultados.

1. Preliminares

Seja H um espaço de Hilbert real e $A : H \to H$ um operador multívoco, isto é, para todo $x \in H$ tem-se que $Ax \in 2^H$. Denotaremos o domínio de A por $D(A) = \{x \in H;\ Ax \neq \phi\}$ e a imagem de A por $R(A) = \{y \in H;\ y \in Ax$ para algum $x \in D(A)\}$. Diremos também que $[x, y] \in A$ se $x \in D(A)$ e $y \in Ax$.

Definição: Um operador multívoco $A : H \to H$ será dito *monótono* (ou *monotônico*) se para todo $[x_i, y_i] \in A$, $i = 1, 2, \exists\ \alpha \geq 0$ tal que $(y_1 - y_2, x_1 - x_2)_H \geq \alpha |x_1 - x_2|_H^2$. Se $\alpha > 0$ A é dito *estritamente monótono*.

Definição: Se $A : H \to H$ for maximal dentre o conjunto dos operadores monótonos de H então A será dito *maximal monotônico*. Neste caso, denotaremos: A é $m.m.$

Uma caracterização útil desta última definição é dada por:

Proposição 1.1: *Seja $A : H \to H$, então são equivalentes*

i) *A é maximal monotônico, $(m.m)$,*

ii) *A é monótono e $R(I + A) = H$, onde I é o operador identidade de H.*

Prova: Veja Brezis [2], Capítulo 2, Proposição 2.2.

A seguir vamos dar alguns exemplos de operadores $m.m.$ Como muitos deles serão citados no decorrer deste trabalho, faremos alguns detalhamentos e comentários sobre suas propriedades.

Exemplo 1.2: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ os limites laterais $f(a_\pm) = \lim_{x \to a_\pm} f(x)$ existam. Definimos então o operador multívoco $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\tilde{f}(a) = \{f(a)\}$ se f for contínua em a e por $\tilde{f}(a) = \{y; f(a_-) \leq y \leq f(a_+)\}$ quando f não for contínua em a. Então $\tilde{f}$ é $m.m$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.3: Sejam $\phi : H \to \mathbb{R}$, $\phi \not\equiv \infty$, um funcional convexo e semicontínuo inferiormente e $D(\phi) = \{x \in H; \phi(x) < \infty\}$. Seja também $\partial\phi$ o subdiferencial de ϕ, isto é, $[x, y] \in \partial\phi$ se e somente se para todo $u \in H$ tivermos $\phi(u) \geq \phi(x) + (y, u - x)$. Segundo Brezis [2], Capítulo 2, Exemplo 2.3.4, $\partial\phi$ é operador $m.m.$

Exemplo 1.4: Seja ϕ como no exemplo anterior e seja K um conjunto convexo e fechado de H tal que $K \cap D(\phi) \neq \phi$. Definimos $\phi_K : H \to \mathbb{R}$ por $\phi_K(x) = \phi(x)$ se $x \in K$ e $\phi_K(x) = \infty$ se $x \notin K$. Não é difícil mostrar que ϕ_K é convexo e semicontínuo inferiormente, além disso $\phi_K \not\equiv \infty$. Logo $\partial\phi_K$ é $m.m.$

No exemplo que daremos a seguir vamos obter, à partir de um operador monótono definido sobre um espaço de Banach, um operador $m.m$ definido num determinado espaço de Hilbert.

Exemplo 1.5: Sejam V um espaço de Banach reflexivo, V' seu dual topológico e H um espaço de Hilbert tais que $V \subset H \subset V'$ com inclusões contínuas e densas. Seja A um operador unívoco definido sobre todo V, $A : V \to V'$.

A será dito *monótono* em V se tivermos $(Au - Av, u - v)_{V'V} \geq 0$ para todo $u, v \in V$, onde $(\cdot, \cdot)_{V'V}$ representa a aplicação dualidade entre V' e V.

A será um operador *hemicontínuo* se para todo $u, v, w \in V$ a aplicação real

$\lambda \mapsto (A(u+\lambda v), w)_{V'V}$ for contínua para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

A será um operador *coercivo* se $\lim\limits_{|u|_V \to \infty} (Au, \dfrac{u}{|u|_V}) = \infty$.

Deste modo, se $A : V \to V'$ é monótono, hemicontínuo e coercivo, então, de acordo com Brezis [2], Capítulo 2, Exemplo 2.3.7, a restrição de A a H, que denotaremos por A_H, será um operador $m.m$ de H onde $A_H(x) = A(x)$ para todo $x \in D(A_H) = \{x \in V;\ Ax \in H\}$.

Este fato fornece um critério para saber se certos operadores são $m.m$ em um espaço de Hilbert H. Vejamos alguns exemplos concretos que ilustram as situações descritas anteriormente. Para isso vamos considerar Ω um aberto limitado e regular do $\mathbb{R}^N$ e $p \geq 2$.

Exemplo 1.6: Seja $\psi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que se $u \in L^p(\Omega)$ então

$$\psi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p dx := \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

Observando-se que a função real $f(t) = \dfrac{1}{p}|t|^p$ é diferenciável com derivada $f'(t) = |t|^{p-2}t$ e fazendo uso do Teorema da Convergência de Lebesgue concluímos que ψ é Gateux diferenciável e que para todo $u \in L^p(\Omega)$ tem-se que $\psi'(u) = |u|^{p-2}u$. Também com o uso do teorema da Convergência de Lebesgue, é fácil mostrar que $\psi' : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ é hemicontínuo, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Note que ψ é um funcional convexo, assim para todo $\theta \in [0,1]$ tem -se

$$\psi(u + \theta(v-u)) = \psi((1-\theta)u + \theta v) \leq (1-\theta)\psi(u) + \theta\psi(v).$$

Logo $\dfrac{1}{\theta}[\psi(u+\theta(v-u)) - \psi(u)] \leq \psi(v) - \psi(u)$ e portanto se $\theta \to 0$ concluímos que

$$(\psi'(u), v-u)_{L^{p'},L^p} \leq \psi(v) - \psi(u)\ \forall\, u, v \in L^p(\Omega)$$

e conseqüentemente

$$(\psi'(u) - \psi'(v), u - v) \geq 0.$$

Assim ψ' é monótono, hemicontínuo e coercivo (pois $(\psi'(u), \dfrac{u}{|u|_{L^p}})_{L^{p'}L^p} = |u|_p^{p-1} \to \infty$ quando $|u|_p \to \infty$). Logo se denotarmos a restrição de ψ' a $L^2(\Omega)$

por $\partial\psi$ concluiremos que $\partial\psi$ é $m.m$ onde

$$D(\partial\psi) = \{u \in L^p(\Omega); |u|^{p-2}u \in L^2(\Omega)\}$$

e

$$\partial\psi(u) = |u|^{p-2}u \quad \text{para todo} \quad u \in D(\partial\psi).$$

Uma outra forma de olhar para este mesmo operador é vendo-o como subdiferencial do funcional convexo e semicontínuo inferior ϕ que é dado por $\phi : L^2(\Omega) \to I\!R$ onde

$$\phi(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}|u|_p^p & \text{se} \quad u \in L^p(\Omega) \\ \infty & \text{se} \quad u \notin L^p(\Omega). \end{cases}$$

É fácil ver que ϕ é convexo. A semicontinuidade inferior pode ser obtida da seguinte forma:

Sejam (u_n) uma seqüência de $L^2(\Omega)$ e $u \in L^2(\Omega)$ tais que $u_n \to u$ quando $n \to \infty$. Se $\liminf_{n\to\infty} \phi(u_n) = a$ e $a = \infty$ então $\phi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(u_n)$. Mas se $a \in I\!R_+$ então existe seqüência minimizante que denotaremos ainda por u_n tal que $\lim_{n\to\infty} \phi(u_n) = a$. Da definição de ϕ segue que u_n é uma seqüência limitada em $L^p(\Omega)$. Logo existe nova subseqüência ainda denotada por u_n e $v \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup v$ em $L^p(\Omega)$ e portanto $|v|_p \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n|_p$. Mas $p \geq 2$ e por isso $L^p(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^2(\Omega)$ e assim $u_n \rightharpoonup v$ em $L^2(\Omega)$. Como originariamente $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$ segue que $v = u$ e $|u|_p^p \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n|_p^p$ como queríamos.

Assim, do Exemplo 1.3 segue que $\partial\phi$ é $m.m$ em $L^2(\Omega)$. Para concluir que $\partial\psi(u) = \partial\phi(u)$ e que $D(\partial\phi) = D(\partial\psi) = \{u \in L^p(\Omega); |u|^{p-2}u \in L^2(\Omega)\}$ basta notar que se $u \in D(\partial\psi)$ então $[u, |u|^{p-2}u] \in \partial\phi$, isto é, $\partial\psi \subset \partial\phi$. Mas $\partial\psi$ é maximal monótono, logo $\partial\psi = \partial\phi$.

De modo inteiramente análogo ao anterior, conclui-se que os exemplos dados a seguir são $m.m$ em $L^2(\Omega)$.

Exemplo 1.7: Seja $\phi : L^2(\Omega) \to I\!R$ tal que

$$\phi(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx := \frac{1}{p}|u|_{1,p}^p & \text{se} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \infty & \text{se} \quad u \notin W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Então $\partial\phi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é operador $m.m$ e é dado por

$$D(\partial\phi) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in L^2(\Omega)\}$$

onde

$$\partial\phi(u) = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

e div indica o operador divergente usual. $-\partial\phi$ é usualmente denotado por Δ_p e é chamado de *p-Laplaceano* (neste caso com condição de contorno de Dirichlet).

Exemplo 1.8: Sejam $\alpha, \delta > 0$ e $\beta \geq 0$ e seja $a \in C^1(\mathbb{R}_+)$ tais que $a'(\sigma) \geq 0$ e $\delta\sigma^{p-1} \leq a(\sigma^p)\sigma^{p-1} \leq \alpha\sigma^{p-1} + \beta$. Chamando $A(t) = \int_0^t a(\sigma)d\sigma$, definimos então $\phi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(u) = \begin{cases} \int_\Omega A(|\nabla u(x)|^p)dx & \text{se} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \infty & \text{se} \quad u \notin W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Então

$$D(\partial\phi) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in L^2(\Omega)\}$$

e

$$\partial\phi(u) = -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

onde $\partial\phi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é operador $m.m.$ Este operador é conhecido como *p-Laplaceano generalizado* (neste caso com condição de fronteira de Dirichlet).

Exemplo 1.9: Seja $\phi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(u) = \begin{cases} \frac{\lambda}{p}|u|_{1,p}^p - \frac{\lambda_2}{p_2}|u|_{1,p_2}^{p_2} + \frac{\lambda_1}{p_1}|u|_{1,p_1}^{p_1} & \text{se} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \infty & \text{se} \quad u \notin W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

onde $p > p_2 > p_1 \geq 2$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 > 0$, $p = 2p_2 - p_1$, $\lambda_2^2 \leq 4\lambda\lambda_1$, e $[\lambda_2(p_2 - 1)]^2 - 4\lambda\lambda_1(p-1)(p_1 - 1) \leq 0$. Então

$$D(\partial\phi) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); \Delta_p u \in L^2(\Omega)\}$$

onde

$$\partial\phi(u) = -\lambda\Delta_p u + \lambda_1\Delta_{p_1}u - \lambda_2\Delta_{p_2}u$$

é $m.m$ em $L^2(\Omega)$.

Exemplo 1.10: Seja $\phi : L^2(\Omega) \to I\!R$ tal que

$$\phi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^p dx & \text{se} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \infty & \text{se} \quad u \notin W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

Então $\partial\phi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é operador $m.m$ onde

$$D(\partial\phi) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ \sum_{\partial x_i}^{N} \frac{\partial}{\partial_{x_i}}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) \in L^2(\Omega) \quad \text{e}$$

$$\partial\phi(u) = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)$$

Exemplo 1.11: Seja $\phi : L^2(\Omega) \to I\!R$ tal que para $\lambda > 0$ tem-se:

$$\phi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx + \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u(x)|^p dx & \text{se} \quad u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $\partial\phi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por

$$D(\partial\phi) = \{u \in D(\phi); -\Delta_p u + \lambda|u|^{p-2}u \in L^2(\Omega)\}$$

onde

$$\partial\phi(u) = -\Delta_p u + \lambda|u|^{p-2}u$$

é operador $m.m$.

Observação: Para se avaliar a monotonia de um operador do tipo divergente veja o critério dado no Capítulo 2 através do Lema 1.3.

2. Problemas de Cauchy (Uma Recordação)

A seguir iremos enunciar uma série de resultados já conhecidos concernentes à existência de soluções do problema $u_t + Au \ni f,\ \ u(0) = u_0$. Antes, porém, vejamos o que se entende por soluções desta equação.

Definição: Seja $f \in L^1(0,T,H)$ e o operador multívoco $A : H \to H$ $m.m.$ Diremos que u é uma *solução forte* de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ se $u \in C([0,T];H)$, u é absolutamente contínua sobre todo compacto de $]0,T[$ (e, conseqüentemente, u é derivável q.t.p. em $]0,T[$), $u(t) \in D(A)$ e $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ q.t.p em $]0,T[$.

Por outro lado $u \in C([0,T];H)$ será uma *solução fraca* da equação acima se existirem seqüências $f_n \in L^1(0,T,H)$ e $u_n \in C([0,T];H)$ tais que u_n é solução forte de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $u_n \to u$ em $C([0,T]:H)$ e $f_n \to f$ em $L^1(0,T;H)$.

Vale então o seguinte resultado:

Proposição 2.1: *Sejam $A : H \to H$ operador multívoco m.m, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_0 \in \overline{D(A)}$. Então o problema*

$$\begin{cases} u_t + Au \ni f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

admite uma única solução fraca. Além disso se $f \in L^2(0,T,H)$ e $A = \partial\phi$, onde $\phi \not\equiv \infty$ é um funcional convexo semicontínuo inferiormente, então u é uma solução forte de (2.1) e para todo $t \in (0,T]$, tem-se $u(t) \in D(\phi)$.

Mais ainda, se u e v são soluções fracas de $u_t + Au \ni f$ e $v_t + Av \ni g$, respectivamente, onde $f, g \in L^1(0,T;H)$, então se $0 \le s \le t \le T$ tem-se:

$$|u(t) - v(t)|_H \le \overline{e}^{\alpha(t-s)}|u(s) - v(s)|_H + \int_s^t \overline{e}^{\alpha(t-\sigma)}|f(\sigma) - g(\sigma)|_H d\sigma \tag{2.2}$$

Prova. Brezis [2], Capítulo 3, Lema 3.1, Teorema 3.4 e Teorema 3.6.

Proposição 2.2: *Sejam A operador multívoco m.m e B um operador lipschitziano definido sobre $\overline{D(A)}$. Então se $u_0 \in \overline{D(A)}$ e $f \in L^1(0,T;H)$ o problema*

$$\begin{cases} u_t + Au + Bu \ni f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

tem uma única solução fraca. Se $f \in BV(0,T;H)$, isto é, se f tem variação limitada então u é lipschitziana se e só se $u_0 \in D(A)$.

Prova: Brezis [2], Capítulo 3, Teorema 3.17 e Observação 3.14.

Observação: Com as mesmas idéias da demonstração do teorema anterior podemos mostrar que se A é operador multívoco $m.m$ e se $B : [0,T] \times \overline{D(A)} \to H$ é lipschitziano nas duas variáveis, isto é, existem $L_1, L_2 > 0$ tais que $|B(t_1, u_1) - B(t_2, u_2)|_H \leq L_1|t_1 - t_2| + L_2|u_1 - u_2|_H$ então o problema

$$\begin{cases} u_t + Au + B(t,u) \ni 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

tem uma única solução fraca. Esta solução será lipschitziana se e só se $u_0 \in D(A)$.

Quando os operadores $m.m$ em questão forem também subdiferenciais obtemos soluções fortes impondo menos regularidade sobre $B(t,\cdot)$, de fato,

Proposição 2.3: *Seja $\phi : H \to I\!R$, $\phi \not\equiv \infty$, um funcional convexo e semicontínuo inferiormente e tal que* $\min \phi = 0$. *Sejam $B : [0,T] \times \overline{D(\partial\phi)} \to H, L > 0$ e $\overline{x} \in \overline{D(\phi)}$ tais que $t \mapsto B(t, \overline{x}) \in L^2(0,T;H)$ e $|B(t,x_1) - B(t,x_2)|_H \leq L|x_1 - x_2|_H \;\forall\, x_1, x_2 \in \overline{D(\phi)}$.*

Então para todo $u_0 \in \overline{D(\phi)}$ o problema

$$\begin{cases} u_t + \partial\phi(u) + B(\cdot,u) \ni 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

tem uma única solução forte tal que para todo $t \in (0,T]$ tem-se $u(t) \in D(\phi)$ e para quase todo $t \in (0,T)$

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right|_H^2 + \frac{d}{dt}\phi(u(t)) = -(B(t,u(t)), \frac{du}{dt}(t))_H,$$

além disso se $u_0 \in D(\phi)$ a equação (2.4) será válida em $L^2(0,T;H)$.

Prova: Brezis [2], Capítulo 3, Proposição 3.12.

3. Soluções Periódicas do Problema não Perturbado

Definição: Seja C um conjunto convexo e fechado de H. Diremos que $K : C \to C$ é uma *contração* de C se existir $0 \leq k \leq 1$ tal que para todo $x, y \in C$ tenha-se

$$|K(x) - K(y)|_H \leq k|x-y|_H.$$

Se $0 \leq k < 1$ então K será dita uma *contração estrita* de C.

Sejam A operador multívoco $m.m$ e $f \in L^1(0,T;H)$. Então a aplicação de Poincaré associada a equação $u_t + Au \ni f$ está bem definida pela Proposição 2.1 e é dada por

$$\begin{array}{rccc} K: & \overline{D(A)} & \to & \overline{D(A)}, \\ & u_0 & \mapsto & u(T) \end{array}$$

mais ainda, de (2.2) K é uma contração pois $|K(u_0) - K(v_0)|_H \leq \overline{e}^{\alpha T}|u_0 - v_0|$, onde α é a constante de monotonia de A, e segue de Brezis [2], Capítulo 2, Teorema 2.2 que $\overline{D(A)}$ é um conjunto fechado e convexo de H. Assim se $\alpha > 0$ K será uma contração estrita de $\overline{D(A)}$ e portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach K terá um único ponto fixo e conseqüentemente

$$\begin{cases} u_t + Au \ni f \\ u(0) = u(T) \end{cases} \tag{3.1}$$

terá uma única solução (fraca).

Mas se $\alpha = 0$ e A for também um operador coercivo, isto é, existe $u \in H$ tal que $\lim\limits_{|x| \to \infty} (y, \dfrac{x-u}{|x|_H}) = \infty$ onde $y \in Ax$, segue de Brezis [2] que o Problema (3.1) vai admitir uma solução fraca, mas não necessariamente única. Na realidade, fazendo-se pequenas alterações na demonstração dada por Brezis podemos permitir que outros operadores, além de A, atuem no sistema durante o intervalo $(0,T)$. Esse fato foi notado inicialmente em [8] por Kawohl e Rühl, trabalho que será comentado após a demonstração do Teorema 3.2. Mas neste caso permitiu-se apenas que houvesse a atuação de operadores $m.m$ coercivos. O que vimos é que fortalecendo-se a coercividade e a monotonia dos operadores A podemos permitir que operadores lipschitzianos coercivos e até não coercivos (mas satisfazendo hipóteses adicionais) possam atuar alternadamente com A de modo que o sistema ainda responda de maneira periódica. Esses fatos serão abordados no decorrer desta seção, antes, porém, precisamos citar o seguinte resultado sobre pontos fixos:

Proposição 3.1: *Seja C um conjunto convexo fechado de um espaço de Banach uniformemente convexo X. Se $K : C \to C$ é uma contração (não necessariamente estrita) e se $\exists\ u_0 \in C$ tal que $\{K^n u_0\}$ é uma seqüência limitada então K tem um ponto fixo.*

Prova: Este é um caso particular do Teorema 1.3 de Brezis [2], Capítulo 1, Seção 1.2.

Teorema 3.2: *Seja $m \in I\!N - 0$ e $A(t) = A_i$ quando $t \in [a_{i-1}, a_i)$ onde $i = 1, \ldots m$, e cada A_i é m.m coercivo, $\overline{D(A_i)} = D$ e $\pi = \{0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = T\}$ é uma partição do intervalo $[0,T]$. Então se $f \in L^1(0,T;H)$ o problema*

$$\begin{cases} u_t + A(t)u \ni f \\ u(0) = u(T) \end{cases} \tag{3.2}$$

tem uma solução fraca.

Prova: O caso $m = 1$ foi demonstrado em Brezis [2], Capítulo 3, Teorema 3.15. O caso geral será demonstrado de modo análogo. Notemos primeiramente que se u é solução de $u_t + A(t)u \ni f$ então, em paxrticular, $u^j = u\Big|_{[a_{j-1},a_j)}$ é solução de $(u^j)_t + A_j(u^j) \ni f,\ t \in [a_{j-1}, a_j)$ com $u^j(a_{j-1}) = u^{j-1}(a_{j-1})$ e $j = 1, \ldots, m$.

Seja $u_0 \in D$ e seja (u_n) onde, $n > 1$ uma seqüência de soluções da equação $\frac{d}{dt}u_n + A(t)u_n \ni f$ tal que $u_n(0) = u_{n-1}(T)$ onde por definição $u_0(t) \equiv u_0$ em $[0,T]$. Agora por (2.2) teremos

$$\begin{aligned}
&|u_n(T) - u_n(0)|_H = |u_n(T) - u_{n-1}(T)|_H \\
&= |u_n(a_m) - u_{n-1}(a_m)|_H \\
&\leq |u_n(a_{m-1}) - u_{n-1}(a_{m-1})|_H \leq \ldots \\
&\leq |u_n(a_0) - u_{n-1}(a_0)|_H = |u_n(0) - u_{n-1}(0)|_H \\
&= |u_{n-1}(T) - u_{n-1}(0)|_H \qquad \forall\, n \in I\!N.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|u_n(T) - u_n(0)|_H \leq |u_1(T) - u_0|_H \qquad \forall\, n \in I\!N. \tag{3.3}$$

Da coercividade dos A_i's existem x_i, $i = 1, \ldots, m$, tais que

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(y, \frac{x - x_i}{|x|}\right)_H = \infty, \quad \text{onde} \quad [x, y] \in A_i.$$

Vamos tomar $L > T^{-1}(C_1 + C_2 + 2\sum_{i=1}^{m}|x_i|_H)$, onde $C_1 = |f|_{L^1H}$ e $C_2 = |u_1(T) - u_0|_H$.

Novamente da coercividade dos A_i's, dado $L > 0 \ \exists \ R > 0$ tal que se $[x, y] \in A_i$ e $|x|_H > R$ então $(y, x - x_i)_H \geq L|x - x_i|_H$.

Com estes fatos vamos mostrar que para todo n existe um $t_0 = t_0(n) \in (0, T)$ tal que $|u_n(t_0)|_H \leq R$. Suponhamos por absurdo que $|u_n(t)|_H > R \quad \forall\, t \in (0, T)$ e $\forall\, n$. Então, como $f(t) - \frac{d}{dt}u_n(t) \in Au_n(t)$, tem-se da coercividade dos A_i's que:

$$(f(t) - \frac{d}{dt}u_n(t), u_n(t) - x_i)_H \geq L|u_n(t) - x_i|_H \quad t \in (a_{i-1}, a_i).$$

Mas

$$\frac{d}{dt}(u_n(t) - x_i) = \frac{d}{dt}u_n(t) \quad \text{e} \quad \left(\frac{d}{dt}u_n(t), \frac{u_n(t)}{|u_n(t)|}\right)_H = \frac{d}{dt}|u_n(t)|_H$$

e assim

$$|f(t)|_H - \frac{d}{dt}|u_n(t) - x_i|_H \geq L.$$

Integrando-se em (a_{i-1}, a_i), $i = 1, \ldots, m$ e somando-se as expressões em i tem-se

$$\begin{aligned} C_1 \quad + \quad & \sum_{i=1}^{m}(|u_n(a_{i-1}) - x_i|_H - |u_n(a_i) - x_i|_H) \\ = \;& C_1 + |u_n(0) - x_1|_H - |u_n(T) - x_m|_H \\ - \;& \sum_{i=1}^{m-1}|u_n(a_i) - x_i|_H + \sum_{i=1}^{m-1}|u_n(a_i) - x_{i+1}|_H \geq LT. \end{aligned}$$

Mas $|a| - |b| \leq |a - b|$, logo $LT \leq C_1 + 2\sum_{i=1}^{m}|x_i|_H + |u_n(T) - u_n(0)|_H$ e por (3.3) teremos

$$LT \leq C_1 + C_2 + 2\sum_{i=1}^{m}|x_i|_H, \quad \text{o que é uma contradição.}$$

Então para todo $n \in I\!N$ existe $t_0 = t_0(n) \in [0, T]$ tal que $|u_n(t_0)|_H \leq R$. Seja $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $t_0 \in [a_{i_0 - 1}, a_{i_0})$. Vamos mostrar que $|u_n(a_{i_0})|_H$ é limitado e que conseqüentemente $|u_n(T)|_H$ também o é.

Observamos agora que se $[\xi_i, \eta_i] \in A_i$ então $v(t) \equiv \xi_i$ é solução de $v_t + Av \ni \eta_i, v(t_0) = \xi_i$. Assim, de (2.2), tem-se que

$$|u_n(t) - \xi_{i_0}|_H \leq |u_n(t_0) - \xi_{i_0}|_H + \int_{t_0}^{t} |f(\sigma) - \eta_{i_0}|_H d\sigma, \quad t_0 \leq t \leq a_{i_0}.$$

Logo

$$|u_n(a_{i_0})|_H \leq R + 2|\xi_{i_0}|_H + (a_{i_0} - a_{i_0-1})|\eta_{i_0}|_H + |f|_{L^1(a_{i_0-1}, a_{i_0}; H)} = R_{i_0}.$$

Prosseguindo com este argumento de i_0 até m, concluímos que

$$|u_n(T)|_H \leq mR + 2\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|_H + T. \sup_{i=1,\ldots m} |\eta_i|_H + C_1 = \overline{R} \qquad \forall\, n \in I\!N.$$

Mas, se $K : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$, $K(u_0) = u(T)$ é a aplicação de Poincaré associada à equação (3.2), então $K^n(u_0) = u_n(T)$. Logo, pela Proposição 3.1, K tem um ponto fixo e, conseqüentemente, o problema (3.2) tem uma solução fraca u. Observamos que se f é T-periódica, da unicidade de soluções dada pela Proposição 2.1, u também será T-periódica. □

Um exemplo particular desta situação é dado por Kawohl e Hull [8]. Nesse trabalho são encontradas condições suficientes para que o problema abaixo tenha solução:

$$(P)\left\{\begin{array}{lcll} u_t(t,x) - \Delta u(t,x) & + & \beta_0(u(t,x)) \ni f(t,x) & \text{se} \;\; t \in (0,T) \\ & & & \text{e} \;\;\; x \in \Omega, \\ & - & \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(t,x) \in \beta_1(u(t,x)) & \text{se} \;\; t \in [nT, nT + \bar{t}) \\ & & & \text{e} \;\;\; x \in \partial\Omega, \\ & - & \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(t,x) \in \beta_2(u(t,x)) & \text{se} \;\; t \in [nT + \bar{t}, (n+1)T) \\ & & & \text{e} \;\;\; x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u(T,x) & & & \text{se} \;\; x \in \Omega, \end{array}\right.$$

onde $\beta_i : I\!R \to 2^{I\!R}, i = 0,1,2$, são operadores $m.m$, $0 \leq \bar{t} \leq T$, Ω é aberto limitado e regular do $I\!R^N$ e $f \in L^2(0,T;H)$. Escrevendo (P) na forma vetorial tem-se

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} u_t + \partial\phi_1 u \ni f & t \in (0,\bar{t}) \\ u_t + \partial\phi_2 u \ni f & t \in (\bar{t},T) \\ u(0) = u(T) & \end{array}\right.$$

onde $\partial\phi_i$ é o subdiferencial do funcional convexo, semicontínuo inferior $\phi_i : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\phi_i(u) = \begin{cases} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + j_0(u(x))dx + \int_{\partial\Omega} j_i(u(s))ds & , \quad \text{se as integrais são finitas,} \\ \\ \infty & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $j_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $\partial j_i = \beta_i,\ i = 0, 1, 2$. Assim $\partial\phi_i$ que já é $m.m$ será também coercivo se

$$\lim_{|r|\to\infty} (|\Omega| j_0(r) + |\partial\Omega| j_i(r)) \frac{1}{|r|} = \infty$$

desta forma, pela Proposição 3.1 e pelo Teorema 3.2, (P) terá uma solução forte.

Uma outra situação para o problema (3.2) é aquela onde um dos A_i não é coercivo. Para ilustrar esse caso vamos tomar $m = 2$, A_i $m.m$, A_1 coercivo e A_2 não coercivo. Neste caso, sem hipóteses adicionais sobre estes operadores, não é claro que obteremos sempre soluções para (3.2). Mas se "quantificarmos" a coercividade de A_1 e a não coercividade de A_2, podemos exibir uma situação onde (3.2) vai admitir solução. Esta situação é dada pelo seguinte:
Suponhamos que existam $\alpha_i, \beta_i > 0,\ i = 1, 2$, tais que

$$\forall \quad [x, y] \in A_1, \quad \left(y, \frac{x}{|x|_H}\right)_H \geq \alpha_1 |x|_H - \beta_1, \tag{3.4}$$

$$\forall \quad [x, y] \in A_2, \quad \left(y, \frac{x}{|x|_H}\right)_H \geq -\alpha_2 |x|_H - \beta_2. \tag{3.5}$$

Neste caso, se u é solução de (3.2), então

$$\begin{aligned} \left(f(t) - \frac{d}{dt}u(t), \frac{u(t)}{|u(t)|_H}\right)_H &\geq \alpha_1 |u(t)|_H - \beta_1, \quad \text{para} \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \left(f(t) - \frac{d}{dt}u(t), \frac{u(t)}{|u(t)|_H}\right)_H &\geq -\alpha_2 |u(t)|_H - \beta_2 \quad \text{para} \quad t \in (\bar{t}, T). \end{aligned}$$

Logo, teremos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}|u(t)|_H + \alpha_1 |u(t)|_H \leq \beta_1 + |f(t)|_H \quad t \in (0, \bar{t}) \\ &\frac{d}{dt}|u(t)|_H - \alpha_2 |u(t)|_H \leq \beta_2 + |f(t)|_H \quad t \in (\bar{t}, T). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|u(T)|_H \leq e^{\alpha_2(T-\bar{t})-\alpha_1\bar{t}}|u_0|_H + e^{\alpha_2(T-\bar{t})}\Big(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} + |f|_{L^1H}\Big).$$

Assim, se $a = \alpha_2(T-\bar{t}) - \alpha_1\bar{t} < 0,\ R \geq (1 - e^{a-1}e^{a+\alpha_1\bar{t}}(\beta_1/\alpha_1 + \beta_2/\alpha_2 + |f|_{L^1H})$ e se $|u_0|_H \leq R$ então $|u(T)|_H \leq R$. Logo se $\bar{t} > \dfrac{\alpha_2 T}{\alpha_2 + \alpha_1}$ a aplicação de Poincaré K associada a este problema é uma contração de $\overline{B_R(0)}$ em $\overline{B_R(0)}$ e portanto pela Proposição 3.1, K tem um ponto fixo.

Veja que neste caso foi necessário que o operador A_1 atuasse pelo menos por um tempo $\bar{t} > \alpha_2 T/(\alpha_1 + \alpha_2)$ para que pudéssemos obter uma solução periódica.

Uma situação semelhante ocorre quando no Problema (3.2) um dos operadores é lipschitziano mas não monotônico. Para simplificar vamos supor novamente $m = 2$, A_1 $m.m$ coercivo e A_2 lipschitziano. Neste caso precisamos que A_1 seja estritamente monótono para que a aplicação de Poincaré K seja uma contração. Assim se L é a constante de Lipschitz de A_2 e $\alpha > 0$ a constante de monotonia de A_1 então

$$|K(u_0) - K(v_0)|_H \leq e^{L(T-\bar{t})-\alpha\bar{t}}|u_0 - v_0|_H.$$

Se $\bar{t} > LT/(\alpha + L)$ a contração é estrita o que implica que K tem um único ponto fixo. Mas se $\bar{t} = LT/(\alpha + L)$ então K é uma contração não estrita; neste caso se A_2 for também coercivo mostra-se como no caso onde A_2 era $m.m$ coercivo (Teorema 3.2)que K tem ponto fixo.

Mas, se A_2 não for coercivo e se não houver qualquer hipótese que avalie a coercividade de A_1 como em (3.4) será possível obter soluções periódicas para $\forall\ \bar{t} \in (0, T)$ ou mesmo para $\bar{t} = LT/(\alpha + L)$? Para responder essa pergunta, vamos analisar o seguinte exemplo:

Exemplo 3.3: Seja $H = I\!R$, $A_1 = I$, $A_2 = -I$, $f(t) = 0$ se $t \in [nT, nT + \bar{t})$ e $f(t) = k > 0$ se $t \in [nT + \bar{t}, (n+1)T)$. Se $\bar{t} = T/2$ e se u e v são soluções da equação dada em (3.2), isto é,

$$\begin{cases} u_t + u = 0 & t \in (nT, nT + T/2) \\ u_t - u = k > 0 & t \in (nT + T/2, (n+1)T) \end{cases}$$

então

$$|K(u_0) - K(v_0)|_H = |u(T) - v(T)|_H \leq |u_0 - v_0|_H$$

mas $u(T) = u_0 + k(e^{T/2} - 1) > u_0$, para todo $u_0 \in I\!R$.

Assim, embora K seja uma contração, esse problema não tem solução T-periódica quando $\bar{t} = T/2$.

Este exemplo nos faz pensar que (sem hipóteses do tipo (3.4)) se não houver alguma dissipação de energia durante todo o intervalo $(0, T)$ não será possível garantir a existência de solução T-periódica para todo $\bar{t} \in (0, T)$, já que para algum valor crítico $\bar{t}$ a atuação coerciva de A_1 durante $(0, \bar{t})$ não será suficiente para neutralizar o fornecimento de energia que a atuação de A_2 esteja eventualmente causando.

Assim na próxima seção vamos sair deste caso extremo de trocas periódicas de dissipação e fornecimento de energia, para o caso onde ocorre dissipação e fornecimento de energia simultaneamente, com a condição de que a dissipação predomina para grandes valores da norma da solução.

4. Soluções Periódicas de Problemas Perturbados

Nesta seção iremos procurar soluções periódicas para o problema

$$u_t + A(t)u + B(t, u) \ni 0 \tag{4.1}$$

onde $A(t) = A_i$ se $t \in I_i$, $B(t, \cdot) = B_i(t, \cdot)$ se $t \in I_i$, $i = 1, 2$, $I_1 = [0, \bar{t})$, $I_2 = [\bar{t}, T)$, $A_i : D(A_i) \subset H \to H$ são operadores multívocos $m.m$ coercivos e $B_i : [0, T] \times H \to H$ são operadores localmente lipschitzianos. Note que o Exemplo 3.3 pode ser reescrito nesta forma fazendo-se $A_1 = A_2 = I$, $B_1 = 0$ e $B_2 = -2I + k$, mas nós já vimos que este problema não tem solução periódica quando $\bar{t} = T/2$.

Assim o que vamos fazer a princípio é definir um tipo de coercividade sobre A_i que supere o (eventual) comportamento expansivo de B_i.

Definição: Um operador multívoco $A : D(A) \subset H \to H$ será chamado de *superlinearmente coercivo* em H se existirem $R, \alpha, \sigma > 0$ tais que

$$(w, u)_H \geq \alpha |u|_H^{\sigma+2} \quad \text{para todo} \quad [u, w] \in A \quad \text{tal que} \quad |u|_H > R.$$

Note que esta noção de coercividade permite que $A + B$ continue superlinearmente coercivo quando B é um operador lipschitziano em H pois se L é sua constante de Lipschitz tem-se que se $[u,w] \in A$ então

$$(w+Bu,u)_H \geq \alpha|u|_H^{\sigma+2} - L|u|_H^2 - (|Bv|_H + L|v|_H)|u|_H$$

onde v é algum elemento de H. Assim se $0 < \alpha_1 < \alpha$ e se $\hat{R}$ for suficientemente grande teremos

$$(w+Bu,u)_H \geq \alpha_1|u|_H^{\sigma+2} \quad \text{se} \quad |u|_H > \hat{R}.$$

Exemplos:

Voltando ao Exemplo 1.3 vemos que se $[x,y] \in \partial\phi$ então

$$(y,x)_H \geq \phi(x) - \phi(u) + (y,u)_H \qquad \forall\, u \in H.$$

Assim se $0 \in D(\phi)$ e se $\phi(0) = 0$ teremos

$$(y,x)_H \geq \phi(x) \qquad \forall\, [x,y] \in \partial\phi.$$

Portanto, se existirem $R, \sigma, \alpha > 0$ tais que $\phi(x) \geq \alpha|x|_H^{\sigma+2}$, quando $x \in D(\phi)$ e $|x|_H > R$ então $\partial\phi$ será também superlinearmente coercivo.

Logo, se tomarmos $p > 2$ nos Exemplos 1.6 à 1.11 estes serão superlinearmente coercivos.

De fato, no Exemplo 1.6, $D(\phi) = L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) = H$ (inclusão contínua) e portanto existe $c > 0$ tal que se $u \in D(\phi)$ então $|u|_2 \leq c|u|_p$ e conseqüentemente $\phi(u) = \dfrac{1}{p}|u|_p^p \geq \dfrac{1}{pc^p}|u|_2^p$.

O Exemplo 1.7 segue da mesma forma, já que $D(\phi) = W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ continuamente e $\phi(u) = \dfrac{1}{p}|u|_{1,p}^p$.

No Exemplo 1.8 $D(\phi) = W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\phi(u) = \int_\Omega A(|\nabla u(x)|^p)dx$ onde $A(t) = \int_0^t a(s)ds$ e $a(s) \geq \delta > 0$; logo, $A(t^p) \geq \delta t^p$ e, portanto, $\phi(u) \geq \delta|u|_{1,p}^p \geq \overline{\delta}|u|_2^p$.

No Exemplo 1.9 também temos $D(\phi) = W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\phi(u) = \dfrac{\lambda}{p}|u|_{1,p}^p - \dfrac{\lambda_2}{p_2}|u|_{1,p_2}^{p_2} + \dfrac{\lambda_1}{p_1}|u|_{1,p_1}^{p_1}$ e $p > p_2 > p_1 \geq 2$. Assim, $\phi(u) \geq \dfrac{\lambda}{p}|u|_{1,p}^p - \dfrac{\lambda_2}{p_2}|u|_{1,p_2}^{p_2}$; mas $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W_0^{1,p_2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ continuamente. Logo se $0 < \delta < \dfrac{\lambda}{p}$ e $|u|_2$ for suficientemente grande, teremos $\phi(u) \geq \delta|u|_2^p$.

No Exemplo 1.10 temos $D(\phi) = W^{1,p}(\Omega)$ e $\phi(u) \geq c|u|_{1,p}^p$, para alguma constante $c > 0$.

No Exemplo 1.11 temos $D(\phi) = W^{1,p}(\Omega)$ onde $\phi(u) \geq \dfrac{\min\{1,\lambda\}}{p}|u|_{1,p}^p$.

Por outro lado, se no Exemplo 1.4, K é um conjunto convexo e fechado tal que $0 \in K$ e se ϕ é o funcional dado acima então $0 \in K \cap D\phi$ e portanto $\phi_K(0) = \phi(0) = 0$. E mais para todo $x \in D\phi_K = D\phi \cap K$ tal que $[x, y] \in \partial\phi_K$ teremos

$$(y, x)_H \geq \phi_K(x) = \phi(x) \geq \alpha|x|_H^\sigma$$

portanto $\partial\phi_K$ também é superlinearmente coercivo. Assim, se construirmos o operador do Exemplo 1.4 à partir dos Exemplos 1.6 à 1.11, $\partial\phi_K$ associado a qualquer destes exemplos será superlinearmente coercivo desde que $0 \in K$.

Vamos então supor que em (4.1) $A_i, i = 1, 2$, sejam superlinearmente coercivos. Note que, mesmo que a aplicação de Poincaré K associada a esta equação esteja bem definida, ela só será uma contração se $B_1 = B_2 = 0$ pois se $L_i > 0, i = 1, 2$, são as constantes de Lipschitz associadas a B_i teremos

$$|K(u_0) - K(v_0)|_H \leq e^{L_1\bar{t} + L_2(T-\bar{t})}|u_0 - v_0|_H.$$

Logo K será apenas Lipschitziana e, portanto, nem a Proposição 3.1 nem o Teorema do Ponto Fixo de Banach são aplicáveis. Por isso vamos supor que A_i, $i = 1, 2$, sejam também "regularizantes" o suficiente para que K seja não só contínua mas completamente contínua.

Na Proposição 2.1: vimos que se $A = \partial\phi$ e $f \in L^2(0, T; H)$ as soluções u de $u_t + Au \ni f$ são fortes e além disso $u(t) \in D(\phi)$ se $t > 0$. Logo se $D(\phi) \subset X$ onde X é um espaço de Banach compactamente imerso em H então $K(\overline{D(\partial\phi)}) \subset X$; e se conjuntos limitados de $\overline{D(\partial\phi)}$ forem levados, por K, a conjuntos limitados de X então K será completamente contínua. Vamos então estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 4.1: *Sejam X espaço de Banach e H espaço de Hilbert tais que $X \subset H$ compactamente. Sejam $\phi_i : H \to \mathbb{R}$ funcionais convexos, semicontínuos inferiormente e tais que $\overline{D\phi_1} = \overline{D\phi_2} = D \neq \phi$. Suponhamos também que existam*

$\alpha_i, \sigma_i, \lambda_i > 0$ *tais que:*

$$(w,u)_H \geq \alpha_1 |u|_H^{\sigma_1+2} - \lambda_1 \quad \text{se} \quad [u,w] \in \partial\phi_1, \tag{4.2}$$

$$0 \in D(\phi_2) \subset X \quad \text{e} \quad \phi_2(u) \geq \alpha_2 |u|_X^{\sigma_2+2} - \lambda_2. \tag{4.3}$$

Sejam $B_i : [0,T] \times D \to H$, $i = 1,2$, *tais que*

$$\exists\, u_i \in D \quad \textit{para o qual} \quad t \to B_i(t,u_i) \in L^2(0,T;H) \tag{4.4}$$

$$\exists\, g_i : I\!R \to I\!R_+ \quad \textit{satisfazendo} \quad g_i(\sigma) \leq \frac{\beta_i}{2}(|\sigma|^{\gamma_i} + 1) \tag{4.5}$$

para algum $\beta_i \geq 0$ *e* $0 \leq \gamma_i < \sigma_i$, *tais que*

$$|B_i(t,u) - B_i(t,v)|_H \leq g_i(|u|_H + |v|_H)|u-v|_H \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, u,v \in D. \tag{4.6}$$

Então o problema

$$\begin{cases} u_t + A(t)u + B(t,u) \ni 0 & t \in (0,T) \\ u(0) = u(T) \end{cases} \tag{4.7}$$

tem uma solução forte, onde $A(t) = A_i = \partial\phi_i$ *e* $B(t,\cdot) = B_i(t,\cdot)$ *se* $t \in I_i$, $i = 1,2$,

$$I_1 = [0,\bar{t}) \quad e \quad I_2 = [\bar{t},T).$$

Além disso se $t \mapsto B_i(t,\cdot)$, $i = 1,2$, *forem* T*-periódicas a solução* u *de* (4.7) *também será.*

Observação: Dos exemplos dados anteriormente o Exemplo 1.6 (ou 1.4 quando associado à 1.6) não satisfaz a condição $D(\phi) \subset X$ com $X \subset L^2(\Omega)$ compactamente pois $D(\phi) = L^p(\Omega)$. Nos demais $D(\phi) \subset W^{1,p}(\Omega)$ que está compactamente imerso em $L^2(\Omega)$ se $p \geq 2$.

Prova do Teorema 4.1:

Suponhamos, sem perda de generalidade que $\phi_2(0) = 0$ e tomemos inicialmente γ_i, dado em (4.5), nulo, isto é, $\forall\, u,v \in D$ e $\forall\, t \in [0,T]$ tem-se

$$|B(t,u) - B(t,v)|_H \leq \beta_i |u-v|_H.$$

Assim, da Proposição 2.3, segue que a aplicação de Poincaré $K : D \to D$, onde $K(u_0) = u(T)$, está bem definida e que $K(D) \subset D(\phi_2)$, mais ainda K é lipschitziana pois se u e v são soluções da equação (4.1) então

$$(u - v)_t + A(t)u - A(t)v + B(t,u) - B(t,v) \ni 0.$$

Mas se multiplicarmos esta equação por $(u - v)$ e usarmos a monotonia dos A_i's concluímos que para todo $t \in I_i$ e $i = 1,2$ tem-se:

$$\frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|_H^2 \leq (B_i(t,u(t)) - B_i(t,v(t), u(t) - v(t))_H \leq \beta_i|u(t) - v(t)|_H^2.$$

Portanto,

$$|K(u(0)) - K(v(0))|_H = |u(T) - v(T)|_H \leq e^{\gamma_1\bar{t}+\gamma_2(T-\bar{t})}|u(0) - v(0)|_H.$$

Agora, usando a coercividade superlinear dos A_i's vamos mostrar que $\exists\ R > 0$ tal que $K : \overline{B_R(0)} \cap D \to \overline{B_R(0)} \cap D$ onde $\overline{B_R(0)}$ é a bola fechada em H de centro na origem e raio R.

Vamos designar por (P_i) a equação $u_t + A_i(u) + B_i(t,u) \ni 0,\ t \in I_i$.

Da hipótese sobre X concluímos que existe $c > 0$ tal que $|\cdot|_H \leq c|\cdot|_X$. Assim, se $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1,\ \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2/c^{\sigma_2+2}$ e $u \in D(\partial\phi_i)$ então

$$(\partial\phi_i(u), u)_H \geq \tilde{\alpha}_i|u|_H^{\sigma_i+2} - \lambda_i, \quad i = 1,2. \tag{4.8}$$

Seja agora u uma solução de (P_i), $i = 1,2$, tal que $u(0) = u_0$; multiplicando-se (P_i) por $u(t)/|u(t)|_H$ temos que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_H + \tilde{\alpha}_i|u(t)|_H^{\sigma_i+1} \leq |B_i(t,u(t))|_H + \lambda_i \quad t \in I_i. \tag{4.9}$$

Da desigualdade de Young temos que se $a > 0$ então

$$\frac{(\sigma_i + 1)}{\varepsilon^{\sigma_i+1}}a \leq a^{\sigma_i+1} + \frac{\sigma_i}{\varepsilon^{(\sigma_i+1)^2/\sigma_i}} \qquad \forall\ \varepsilon > 0$$

e das hipóteses (4.4) e (4.5) sobre B_i temos que $\exists\ f_i \in L^2(0,T;H),\ i = 1,2$, tais que

$$|B_i(t,u)|_H \leq \beta_i|u|_H + |f_i(t)|_H + \lambda_i \qquad \forall\ u \in D.$$

Logo usando estes dois últimos fatos em (4.9) e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $\tilde{\beta}_i = \tilde{\alpha}_i \dfrac{(\sigma_i+1)}{\varepsilon^{\sigma_i+1}} - \beta_i > 0$ teremos que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_H + \tilde{\beta}_i |u(t)|_H \leq |f_i(t)|_H + d_i \ , \quad t \in I_i \tag{4.10}$$

onde $d_i = \dfrac{\tilde{\alpha}_i \sigma_i}{\varepsilon^{(\sigma_i+1)^2/\sigma_i}} + \lambda_i$, $\quad i = 1,2$. Se multiplicarmos ambos os lados desta desigualdade por $e^{\tilde{\beta}_i t}$ e integrarmos em I_i e se denotarmos $t_{0,0} = 0,\ t_{0,1} = \bar{t},\ t_{0,2} = T$ e $D_i = \dfrac{di}{\tilde{\beta}_i} + |f_i|_{L^r(0,T;H)} e^{\beta_i(t_{0,i} - t_{0,i-1})}$, $i = 1,2$, concluímos que

$$|u(t)|_H \leq \exp(-\beta_i(t - t_{0,i-1}))|u(t_{0,i-1})|_H + D_i,\ t \in I_i,\ i = 1,2.$$

Assim se $R \geq \dfrac{D_i}{1 - \exp(-\beta_i(t_{0,i} - t_{0,i-1}))}$, $\quad i = 1,2$, e se $|u_0|_H \leq R$ teremos que

$$|u(T)|_H \leq R \quad \text{e} \quad |u(t)|_H \leq 2R \quad \forall\ t \in [0,T]$$

e portanto $K : D \cap \overline{B_R(0)} \to D \cap \overline{B_R(0)}$. Vamos mostrar agora que K é também completamente contínua.

Da Proposição 2.3: temos que $u(t) \in D(\phi_2)$ quando $t \in (\bar{t}, T]$, logo em particular $K(D) \subset D(\phi_2) \subset X$. Assim se $K(D \cap \overline{B_R(0)})$ for um conjunto limitado na norma de X, da inclusão compacta de X em H concluiremos que $K(D \cap \overline{B_R(0)})$ é um conjunto relativamente compacto em H e portanto $K|_{D\cap\overline{B_R(0)}}$ será uma aplicação completamente contínua.

Para obtermos a limitação de $K(D \cap \overline{B_R(0)})$ em X notemos que se u é uma solução de $(P_1), (P_2)$ tal que $|u(0)|_H \leq R$ então da limitação de B_2 e de u temos que $|B_2(t, u(t))|_H \leq 2\beta_2 R + |f_2(t)|_H,\ t \in I_2$.

Multiplicando-se (P_2) por (u_t) e usando-se a Proposição 2.3 temos que

$$\left|\frac{d}{dt}u(t)\right|_H^2 + \frac{d}{dt}\phi_2(u(t)) \leq (2\beta_2 R + |f_2(t)|_H)\left|\frac{d}{dt}u(t)\right|_H, \quad \text{se} \quad t \in I_2. \tag{4.11}$$

Modificando esta equação temos que se $t \in I_2$

$$\begin{aligned}
&(t-\bar{t})\left|\frac{d}{dt}u(t)\right|_H^2 + \frac{d}{dt}((t-\bar{t})\phi_2(u(t))) \\
&\leq (t-\bar{t})(2\beta_2 R + |f_2(t)|_H)\left|\frac{d}{dt}u(t)\right|_H + \phi_2(u(t)) \\
&\leq \frac{(t-\bar{t})}{2}\left[(2\beta_2 R + |f_2(t)|_H)^2 + \left|\frac{d}{dt}u(t)\right|_H^2\right] + \phi_2(u(t)).
\end{aligned}$$

Assim, se integrarmos esta desigualdade de t a T onde $t > \bar{t}$, concluímos que

$$(T-\bar{t})\phi_2(u(T)) \leq (t-\bar{t})\phi_2(u(t)) + \int_t^T \phi_2(u(\xi))d\xi + 8\beta_2^2R^2(T-\bar{t})^2 + 2(T-\bar{t})|f_2|^2_{L^2H}. \quad (4.12)$$

Vamos estimar $(t-\bar{t})\phi_2(u(t))$ e $\int_t^T \phi_2(u(\xi))d\xi$ quando $t \to \bar{t}$; note que nós não sabemos se $u(\bar{t}) \in D(\phi_2)$.

Em primeiro lugar vejamos que, se $[u,w] \in \partial\phi_2$, então $(w,u) \geq \phi_2(u)$. Logo, multiplicando-se (P_2) por $u(t)$ e lembrando que $|u(t)|_H \leq 2R$ para todo $t \in [0,T]$, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_H^2 + \phi_2(u(t)) \leq \frac{1}{2}|B_2(t,u(t))|_H^2 + \frac{1}{2}|u(t)|_H^2 \leq \frac{1}{2}\Big(2\beta_2R + |f_2(t)|_H\Big)^2 + \frac{1}{2}R^2.$$

Integrando esta desigualdade em I_2, tem-se:

$$\int_{\bar{t}}^T \phi_2(u(t))dt \leq 2(T-\bar{t})R^2(4\beta_2^2+1) + |f_2|^2_{L^2H} = C.$$

Com esta limitação, conclui-se que existe uma seqüência $t_n \to \bar{t}$ tal que $(t_n - \bar{t})\phi_2(u(t_n)) \to 0$ quando $n \to \infty$ pois, caso contrário, existiriam a e δ positivos tais que se $t \in (\bar{t}, \bar{t}+\delta) \subset (\bar{t}, T)$ então $(t-\bar{t})\phi_2(u(t)) > a$, e conseqüentemente, $\int_{\bar{t}}^T \phi_2(u(t))dt > \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\delta} \frac{a}{t-\bar{t}}dt = \infty$, o que é uma contradição.

Assim, se trocarmos t por t_n em (4.12) e fizermos $n \to \infty$ teremos que

$$(T-\bar{t})\phi_2(u(T)) \leq C + 8\beta_2^2R^2(T-\bar{t})^2 + 2(T-\bar{t})|f_2|^2_{L^2H} = R_1.$$

Mas $\phi_2(u(T)) \geq \alpha_2|u(T)|_X^{\sigma_2+2} - \lambda_2$; logo, se $|u(0)|_H \leq R$, então

$$|K(u(0))|_X = |u(T)|_X \leq (R_1(T-\bar{t})^{-1}\alpha_2^{-1})^{1/(\sigma_2+2)} + \lambda_2.$$

Portanto $K : D \cap \overline{B_R(0)} \to D \cap \overline{B_R(0)}$ é completamente contínua. Logo, do teorema do ponto fixo de Schauder, concluímos que K tem um ponto fixo, o que mostra a existência de solução para (4.7). Se $t \to B(t,\cdot)$ for T-periódica, da unicidade de soluções dada pela Proposição 2.1, segue que u também será T-periódica.

Vejamos agora o caso onde γ_i dado em (4.5) é tal que $0 < \gamma_i < \sigma_i$. Temos então que $|B_i(t,u) - B_i(t,v)|_H \leq g_i(|u|_H + |v|_H)|u-v|_H$ onde $g_i(\sigma) \leq \frac{\beta_i}{2}(|\sigma|^{\gamma_i} + 1)$. Logo, da desigualdade de Young, segue que existem constantes $\beta_{i,1} > 0$ e $0 < \beta_{i,2} < \tilde{\alpha}_i$ tais que

$$|B_i(t,u)|_H \leq |f_i(t)|_H + \beta_{i,1} + \beta_{i,2}|u|_H^{\gamma_i+1},$$

onde $f_i \in L^2(0,T;H)$.

Assim como na primeira etapa da demonstração deste teorema, concluímos através de estimativas a priori, que existem $R > 0$ e $K(R) > 0$ tais que, se $|u_0|_H \leq R$ e se u é solução de (4.1) tal que $u(0) = u_0$ então $|u(t)|_H \leq K(R)$ para $\forall\ t \in [0,T]$ e $|u(T)|_H \leq R$.

Agora note que se definirmos $C_i(t,u) = B_i(t,Pu)$, onde $P : H \to \overline{B_{K(R)}(0)} \subset H$ é a projeção de H sobre a bola $\overline{B_{K(R)}(0)}$, então C_i será globalmente lipschitziana em H, uniformemente em $[0,T]$, já que P é globalmente lipschitziana e limitada. Assim, pela parte anterior, o problema

$$\begin{cases} u_t + A(t)u + C(t,u) \ni 0 \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

com $C(t,\cdot) = C_i(t,\cdot)$ se $t \in I_i$, admite solução u tal que $|u(t)|_H \leq K(R)$, $\forall\, t \in [0,T]$. Mas $B_i(t,\cdot)\Big|_{\overline{B_{K(R)}(0)}} = C_i(t,\cdot)\Big|_{\overline{B_{K(R)}(0)}}$ logo u é também solução de

$$\begin{cases} u_t + A(t)u + B(t,u) \ni 0 \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

e a demonstração está concluída. $\square$

Observação: Se $\gamma_i = \sigma_i$ então segue das hipóteses sobre $B_i(t,u)$ e de desigualdade de Young que para todo $\varepsilon > 0$

$$|B_i(t,u)|_H \leq \frac{\beta_i}{2}\Big(1 + \frac{\varepsilon^{\sigma_i+1}}{\sigma_i+1}\Big)|u|_H^{\sigma_i+1} + \Big(\frac{\sigma_i}{\sigma_i+1}\Big)\frac{1}{\varepsilon^{(\sigma_i+1)/\sigma_i}} + |B_i(t,0)|_H.$$

Usando esta desigualdade em (4.9) vemos que como $\varepsilon > 0$ é arbitrário se β_i, $i = 1,2$, forem suficientemente pequenos então vai existir $R > 0$ tal que se $|u(0)|_H \leq R$ então $|u(T)|_H \leq R$ e $|u(t)|_H \leq k(R)\ \forall\, t \in (0,T]$.

Assim o problema (4.7) também admite solução quando σ_i (dado em (4.3)) é igual à γ_i (dado em 4.5) e β_i (dado em (4.5)) é suficientemente pequeno, $i = 1,2$.

Teorema 4.2: *Se no teorema anterior as hipóteses* (4.2) *à* (4.4) *forem substituídas respectivamente por:*

i) *existe* $R_1 > 0$ *tal que para todo* $[u,w] \in \partial\phi$, *tal que* $|u|_H > R_1$ *tem-se*

$$(w,u)_H \geq \alpha_1 |u|_H^{\sigma_1+2} - \lambda_1$$

ii) *existe* $R_2 > 0$ *tal que se* $u \in D(\phi_2)$ *e* $|u|_H > R_2$ *então*

$$\phi_2(u) \geq \alpha_2 |u|_X^{\sigma_2+2} - \lambda_2$$

e além disso $0 \in D(\phi_2) \subset X$,

iii) *existem* $u_i \in D$, $i = 1,2$, *tais que*

$$t \mapsto B_i(t,u_i) \in L^\infty(0,T;H),$$

e se as demais hipóteses do Teorema (4.1) *permanecerem as mesmas, então* (4.7) *terá uma solução forte.*

Prova: Como no Teorema (4.1) suponhamos $\phi_2(0) = 0$, sem perda de generalidade, tomemos inicialmente $\gamma_i = 0$. Também como no Teorema (4.1), a aplicação de Poincaré $K : D \to D, K(u_0) = u(T)$ está bem definida e é contínua.

Tomemos inicialmente $R > \{R_1, cR_2\}$, onde c é tal que $|\cdot|_H \leq c|\cdot|_X$. Suponhamos que u é uma solução de $u_t + A(t)u + B(t,u) \ni 0$ tal que $|u(0)|_H \leq R$ e que existe (t_0,t_1) um intervalo maximal em $(0,T)$ tal que $|u(t)|_H > R$ para todo $t \in (t_0,t_1)$. Note que como o intervalo é maximal temos $|u(t_0)|_H = R$.

Multiplicando-se (P_i) por $u(t)/|u(t)|_H$, concluímos que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_H + \tilde{\alpha}_i |u(t)|_H^{\sigma_i+1} \leq \beta_i |u(t)|_H + C_i \quad \text{se} \quad t \in (t_0,t_1) \cap I_i,$$

onde $C_i = \sup\limits_{t\in[0,T]} \{|B_i(t,u_i)|_H + \beta_i |u_i|_H\}$ e u_i é dado em (iii), $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1$ e $\tilde{\alpha}_2 = \dfrac{\alpha_2}{c^{\sigma_2+1}}$.

Logo, pela desigualdade de Young, existem $\tilde{\beta}_i, \tilde{C}_i > 0$ tais que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_H + \tilde{\beta}_i |u(t)|_H^{\sigma_i+1} \leq \tilde{C}_i\ , \quad t \in (t_0,t_1) \cap I_i.$$

Mas, se observarmos a função real $h(x) = \tilde{C}_i - \tilde{\beta}_i x^{\sigma_i+1}$, vemos que, se $\tau_i = (C_i/\tilde{\beta}_i)^{1/(\sigma_i+1)}$, então $h(\tau_i) = 0$, $h(\overline{R}) < 0$ se $\overline{R} > \tau_i$ e $h(\overline{R}) > 0$ se $0 < \overline{R} < \tau_i$.

Logo por Hale [6], Capítulo 1, Lema 6.1 segue que se $\overline{R} \geq \tau_i$ e $|u(t_0)|_H \leq \overline{R}$ então $|u(t)|_H \leq \overline{R}$ em (t_0, t_1).

Assim, se tomarmos $R = \max\{\tau_1, \tau_2, R_1, cR_2\}$ concluímos que $|u(t)|_H \leq R$ para todo intervalo $[0, T]$ e portanto $K : D \cap \overline{B_R(0)} \to K \cap \overline{B_R(0)}$.

O resto da demonstração segue como no teorema anterior. $\square$

Se analisarmos a demonstração destes teoremas notaremos que o fato de A_1 ser o subdiferencial de um funcional ϕ_1, foi usado simplesmente para garantir que a aplicação de Poincaré K estava bem definida e que a solução seria forte. O que enunciaremos a seguir é um resultado onde A_1 é simplesmente $m.m$ e superlinearmente coercivo mas B_1 é "mais regular" que anteriormente.

Teorema 4.3: *Suponhamos $A_2 = \partial\phi_2$ e $B_2(t, \cdot)$ como no Teorema* (4.1) (*respectivamente* 4.2) *e suponhamos A_1 $m.m$ e superlinearmente coercivo tal que para constantes $\sigma_1, \alpha_1 > 0$ e $R_1 = 0$ (respectivamente $R_1 > 0$) tenhamos $(w, u)_H \geq \alpha_1 |u|_H^{\sigma_1 + 2}$ quando $[u, w] \in A_1$ e $|u|_H > R_1$. Suponhamos finalmente que se $t_1, t_2 \in [0, T]$ e $u, v \in D = \overline{D(A_1)} = \overline{D(A_2)}$ então $|B_1(t_1, u) - B_1(t_2, v)|_H \leq L_1|t_1 - t_2| + g_1(|u|_H + |v|_H)|u - v|_H$ onde g_1 é como no Teorema* 4.1 (*respectivamente* 4.2). *Então o problema* (4.7) *com $\bar{t} \neq T$ associado a esses novos operadores A_i e $B_i(t, u)$, $i = 1, 2$ tem uma solução fraca.*

Prova: A demonstração desses fatos segue basicamente como nos Teoremas 4.1 e 4.2. A diferença está no fato de se usar as Proposições 2.2 (e a observação subseqüente a esta) juntamente com a Proposição 2.3 para se garantir que a aplicação de Poincaré associada a este problema esteja bem definida. $\square$

No próximo capítulo continuaremos a estudar o problema (4.7) só que para uma classe mais geral de perturbações $B(t, \cdot)$.

Capítulo 2

Perturbações Superlineares

Comecemos observando que se chamarmos $H = L^2(\Omega)$ e tivermos $s > 1$, então o operador de Nemytskii associado à função $g(\sigma) = \sigma^s$

$$\begin{array}{rlll} N_g : & L^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) \\ & u & \to & u^s \end{array}$$

não está definido sobre todo $L^2(\Omega)$, e tão pouco pertence a classe dos operadores localmente lipschitzianos do $L^2(\Omega)$. Assim os resultados do capítulo anterior não podem ser aplicados a perturbações desse tipo.

Com o propósito de aumentar a classe de perturbações que permite que o problema (4.7) do capítulo 1 admita solução, neste capítulo passaremos a estudar o caso específico dado por:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta_{p_1} u(t,x) = m_1(t) g_1(u(t,x)) + h_1(t,x) & , \ t \in I_1 \text{ e } x \in \Omega \\ u_t(t,x) - \Delta_{p_2} u(t,x) = m_2(t) g_2(u(t,x)) + h_2(t,x) & , \ t \in I_2 \text{ e } x \in \Omega \\ u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0 & , \ t \in [0,T] \\ u(0,x) = u(T,x) & , \ x \in \Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $I_1 = [0, \bar{t})$, $I_2 = [\bar{t}, T)$ e $p_i \geq 2$ se $i = 1, 2$. Mais tarde veremos que muitos dos resultados que serão obtidos para (0.1) serão válidos para uma classe de operadores monótonos (à qual $-\Delta_p$, com $p \geq 2$, pertence) definidos sobre um espaço de Banach reflexivo.

Mas, antes de abordar qualquer problema, vamos listar alguns fatos que serão usados no decorrer deste capítulo.

1. Preliminares

Sejam V um espaço de Banach reflexivo, V' seu dual topológico e H um espaço de Hilbert. Vamos denotar por $|\cdot|_V$, $|\cdot|_{V'}$ e $|\cdot|_H$ suas respectivas normas e por $(\cdot,\cdot)_{V',V}$ a dualidade entre V' e V (o índice $_{V',V}$ será omitido quando estiver claro quais os espaços em questão). Vamos supor que

$$V \subset H \subset V'$$

e que estas inclusões sejam contínuas e densas.

A partir destes espaços construiremos outros espaços de Banach de funções com valores vetoriais. Assim, sejam p, p' tais que $1 \leq p, p' \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; definimos então

$$L^p(0,T;V) = \{u : (0,T) \to V; \int_0^T |u(t)|_V^p dt < \infty\}$$

onde $|u|_{L^pV} = [\int_0^T |u(t)|_V^p dt]^{1/p}$ denota sua norma, e também

$$L^{p'}(0,T;V') = (L^p(0,T;V))' = \quad \text{dual topológico de} \quad L^p(0,T;V),$$

onde $|u|_{L^{p'}V'} = [\int_0^T |u(t)|_{V'}^{p'} dt]^{1/p'}$, e ainda

$$W = \{w \in L^p(0,T;V);\ w_t \in L^{p'}(0,T;V')\},$$

onde $|w|_W = |w|_{L^pV} + |w_t|_{L^{p'}V'}$ e $w_t = \frac{dw}{dt} = w'$.

De acordo com Lions [10], páginas 156 e 321 temos que

$$W \subset C([0,T];H), \tag{1.1}$$

onde este último espaço representa a classe das funções contínuas com domínio em $[0,T]$ e imagem em H. Mais ainda, para todo u e v em W, tem-se:

$$\int_0^T (u'(t), v(t))_{V',V} + (v'(t), u(t))_{V',V} dt = (u(T), v(T))_H - (u(0), v(0))_H \tag{1.2}$$

(vale lembrar que, como V, V' e H se relacionam, temos de resultados clássicos de Análise Funcional que, se $u \in H$ e $v \in V$ então $(u,v)_H = (u,v)_{V',V}$.

Um resultado muito útil que relaciona espaços similares a W com $L^p(0,T;V)$ é o *Critério de Compacidade de Aubin-Lions* que será lembrado no lema abaixo:

Lema 1.1: *Sejam X, Y, Z espaços de Banach onde X e Z são reflexivos, $X \subset Y \subset Z$ continuamente e $X \subset Y$ compactamente. Então se $1 \leq p \leq \infty$ e $1 < q \leq \infty$ temos a seguinte inclusão compacta:*

$$\tilde{W} = \{w \in L^p(0,T;X);\ w_t \in L^q(0,T;Z)\} \subset L^p(0,T;Y).$$

Prova: Veja Lions [10], página 58, Teorema 5.1 quando $1 < p, q < \infty$ e veja Strauss [14] quando $1 \leq p \leq \infty$ e $1 < q \leq \infty$. $\square$

Com este lema fica claro que se $1 < p < \infty$ e se $V \subset H$ compactamente então

$$W \subset L^p(0,T;V), \quad \text{compactamente.}$$

No decorrer deste (e do próximo) capítulo, Ω representará uma região aberta, limitada e suficientemente regular do $I\!R^N$. Para todo $1 \leq p \leq \infty$ teremos os seguintes espaços usuais e suas respectivas normas:

$$\begin{array}{lll} L^p(\Omega) & , & |u|_p = [\int_\Omega |u(x)|^p dx]^{1/p} \\ W_0^{1,p}(\Omega) & , & |u|_{1,p} = [\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx]^{1/p} \\ W^{-1,p'}(\Omega) & , & |w|_{-1,p'} = \sup\limits_{\substack{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ |u|_{1,p}=1}} (w,u)_{W^{-1,p'},W_0^{1,p}}. \end{array}$$

Outro resultado que nos será muito útil trata da continuidade e limitação dos operadores de Nemytskii:

Lema 1.2: *Seja g uma função real e contínua tal que para algum $a \geq 0$ e $s \geq 0$ tenha-se $|g(\sigma)| \leq a(|\sigma|^s + 1)$, $\forall\ \sigma \in I\!R$. Então o operador de Nemytskii associado a g, definido sobre $L^p(0,T;L^q(\Omega))$ e dado por*

$$\begin{array}{rcl} N_g(u)(t,x) & = & g(u(t,x)), \\ N_g : L^p(0,T;L^q(\Omega)) & \rightarrow & L^{p/s}(0,T;L^{q/s}(\Omega)) \end{array}$$

é contínuo, limitado e satisfaz

$$|N_g(u)|_{L^{p/s}L^{q/s}} \leq a(|u|^s_{L^pL^q} + |\Omega|^{s/q}T^{s/p}) \tag{1.3}$$

Prova: Seja $u_n \rightarrow u$ em $L^p(0,T;L^q(\Omega))$. Então qualquer subseqüência desta admite uma outra, que denotaremos por u_j, tal que $u_j(t,x) \rightarrow u(t,x)$ para quase todo $t \in (0,T)$ e $x \in \Omega$. Da continuidade de g conclui-se que para quase todo $t \in (0,T)$ e $x \in \Omega$ tem-se $g(u_j(t,x)) \rightarrow g(u(t,x))$. Mas da hipótese de limitação de g concluímos que

$$|g(u_j(t,x))| \leq a(|u_j(t,x)|^s + 1),$$

assim do Teorema da Convergência de Lebesgue teremos que

$$N_g(u_j) \to N_g(u) \quad \text{em} \quad L^{p/s}(0,T; L^{q/s}(\Omega)).$$

Logo segue de um resultado standard de Espaços Métricos que

$$N_g(u_n) \to N_g(u)$$

e que portanto N_g é contínua. A prova de (1.3) segue diretamente da limitação da g. $\square$

Consideremos agora o seguinte funcional

$$\begin{array}{rccl} \phi: & W_0^{1,p}(\Omega) & \to & I\!R, \\ & u & \mapsto & \dfrac{1}{p}|u|_{1,p}^p, \end{array}$$

onde $p \geq 2$. Usando-se o Teorema da Convergência de Lebesgue e o fato de que a função real $f(t) = |t|^p$ é de classe $C^1(I\!R)$ com $f'(t) = p|t|^{p-2}t$, fica fácil mostrar que $\phi \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ e que para todo u e v em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tem-se:

$$(\phi'(u), v) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} < \nabla u(x), \nabla v(x) > dx.$$

Mas, observando-se que u se "anula" na fronteira e impondo-se que $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \in L^2(\Omega)$, segue do Teorema da Divergência que

$$(\phi'(u), v) = -\int_\Omega div(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x))v(x)dx = -(\Delta_p(u), v)_{L^2(\Omega)}.$$

Assim, ϕ' representa a forma variacional do operador p-Laplaceano com condição de Dirichlet quando definido no $L^2(\Omega)$, ie.,

$$\begin{aligned} -\Delta_p(u) &= -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \\ D(-\Delta_p) &= \{u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ \Delta_p u \in L^2(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Por isso, de agora em diante, passaremos a denotar ϕ' por $-\Delta_p$. Este operador verifica as seguintes propriedades:

$$-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$$

i) *Monotonia forte*: Existe $\alpha > 0$ tal que para todo $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem-se:

$$((-\Delta_p u) - (-\Delta_p v), u - v) \geq \alpha |u - v|_{1,p}^p \tag{1.4}$$

ii) *Hemicontinuidade*: Para todo $\lambda \in R$ e $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ a aplicação abaixo é contínua:

$$\lambda \mapsto (-\Delta_p(u + \lambda w), v) \tag{1.5}$$

iii) *Coercividade*: Para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem-se:

$$(-\Delta_p u, u) \geq |u|_{1,p}^p \tag{1.6}$$

iv) *Limitação*: Para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem-se:

$$|-\Delta_p u|_{-1,p} \leq |u|_{1,p}^{p-1}. \tag{1.7}$$

Prova: As propriedades (1.6) e (1.7) seguem trivialmente da definição de $-\Delta_p$. (1.5) segue do fato de $-\Delta_p = \phi'$ onde $\phi \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$. Finalmente (1.4) é conseqüência do seguinte lema:

Lema 1.3: *Seja $A : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \to I\!R^N$ satisfazendo:*

a) $A(x, \mu, \eta) = (a_j(x, \mu, \eta))$ *onde* $a_j \in C^0(\Omega \times I\!R \times I\!R^N) \cap C^1(\Omega \times I\!R \times I\!R^N \setminus \{0\})$

b) $a_j(x, \mu, o) = 0$

c) (*Condição de Elipticidade*): *Existem p e γ positivos tais que*

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial \eta_j}(x, \mu, \eta)\xi_i\xi_j \geq \gamma|\eta|^{p-2}|\xi|^2$$

onde $\eta = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in I\!R^N$ *e* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N) \in I\!R^N \setminus \{0\}$.

Então se $p \geq 2$ e $\eta, \eta' \in I\!R^N \setminus \{0\}$ teremos que

$$\sum_{j=1}^N (a_j(x, \mu, \eta) - a_j(x, \mu, \eta'))(\eta_j - \eta'_j) \geq \gamma(\frac{1}{4})^{p-2}|\eta - \eta'|^p.$$

Prova do Lema 1.3: Veja Tolksdorff [15], Seção 2, Lema 1.

Assim, podemos completar a prova da propriedade i) acima do seguinte modo: definindo

$$a_j(x,\mu,\eta) = |\eta|^{p-2}\eta_j, \ j = 1,\dots,N,$$

verifica-se facilmente que as hipóteses do Lema 1.3 são satisfeitas e portanto concluímos (1.4). □

Outro fato que será exaustivamente usado é a chamada *Desigualdade de Young*:

Dados $a, b \geq 0$ e $1 < p, p' < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ então é válida a seguinte desigualdade:

$$a.b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Uma conseqüência imediata deste fato é que para todo $\varepsilon > 0$ temos

$$a.b \leq \frac{1}{p}.\varepsilon^p a^p + \frac{1}{p'\varepsilon^{p'}}b^{p'}.$$

2. Soluções Periódicas de Problemas não Perturbados com Mudanças Abruptas no Tempo

Para que possamos investigar a existência de soluções do Problema (0.1), precisaremos redefinir os conceitos de *solução fraca* e *solução forte*.

Assim sejam $p \geq 2$, $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Definição: Diremos que $u \in C([t_0,t_1];L^2(\Omega))$ é uma *solução fraca* do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

quando $u \in W = \{w \in L^p(t_0,t_1,W_0^{1,p}(\Omega));\ w_t \in L^{p'}(t_0,t_1,W^{-1,p'}(\Omega)\}, u(t_0) = u_0$ e u satisfaz (2.1) em $L^{p'}(t_0,t_1;W^{-1,p'}(\Omega))$.

Por outro lado, se $f \in L^2(t_0, t_1; L^2(\Omega))$, então u será uma *solução forte* de (2.1) quando u é solução fraca de (2.1), $u_t \in L^2(t_0, t_1, L^2(\Omega))$ e (2.1) é satisfeita em $L^2(t_0, t_1; L^2(\Omega))$.

Com base nesta definição, se tomarmos

$$I_1 = [0, \bar{t}),\ I_2 = [\bar{t}, T),$$

$p_i \geq 2$, $f_i \in L^{p_i'}(I_i, W^{-1,p_i'}(\Omega))$ e $i = 1, 2$, então $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ será uma *solução fraca* (*forte*) de

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{p_1}(u) = f_1 & , \quad t \in I_1, \\ u_t - \Delta_{p_2}(u) = f_2 & , \quad t \in I_2, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

se $u_i = u|_{I_i}$ for solução fraca (forte) de

$$\begin{cases} (u_i)_t - \Delta_{p_i}(u_i) = f_i & , \quad t \in I_i, \\ u_i(t_{0,i}) = u_{0,i} & , \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $t_{0,1} = 0,\ t_{0,2} = \bar{t},\ u_{01} = u_0$ e $u_{02} = u_1(\bar{t})$.

Para obtermos a existência de soluções para (0.1), será necessário buscar algumas propriedades do Operador Solução associado ao problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{p_1} u = f_1 & , \quad t \in I_1, \\ u_t - \Delta_{p_2} u = f_2 & , \quad t \in I_2, \\ u(0) = u(T). \end{cases} \tag{2.4}$$

(Note que no Capítulo 1 foi mostrado que se $f_i \in L^1(I_i,\ L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$, então (2.4) admite solução).

De acordo com Lions [10], Capítulo 2, Seção 1, Teorema 1.2, usando-se o Método de Faedo-Galerkin, podemos mostrar que para cada $u_{0i} \in L^2(\Omega)$ existe uma única u_i solução fraca de (2.3), (não repetiremos a demonstração deste fato pois no próximo capítulo este mesmo método será usado para mostrar a existência de soluções de um problema mais complexo). Porém, a prova da unicidade será aqui dada pois dela obteremos também a continuidade das soluções de (2.3) com respeito às condições iniciais e como conseqüência a continuidade da aplicação de Poincaré associada à (2.3).

Assim sejam u e v soluções de (2.2) tais que $u_i = u|_{I_i}$ e $v_i = v|_{I_i}$ são soluções de (2.3) com condições iniciais respectivamente dadas por $u(t_{0,i}) = u_{0,i}$ e $v(t_{0,i}) = v_{0,i}$, $i = 1, 2$. Então, para quase todo $t \in I_i$, tem-se:

$$(u_i(t) - v_i(t))_t - \Delta_{p_i}(u_i(t)) + \Delta_{p_i}(v_i(t)) = 0. \tag{2.5}$$

Logo, se multiplicarmos esta equação por $(u_i(t) - v_i(t))$, com a ajuda de (1.2) e da monotonia de $-\Delta_{p_i}$, concluímos que para todo $t \in I_i$ e $i = 1, 2$ vale:

$$|u_i(t) - v_i(t)|_2^2 - |u_i(t_{0,i}) - v_i(t_{0,i})|_2^2 \leq 0.$$

Assim, para todo $t \in [0, T]$ temos que

$$|u(t) - v(t)|_2 \leq |u_{01} - v_{01}|_2 = |u(0) - v(0)|_2.$$

Isto é, vale que $|u - v|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq |u(0) - v(0)|_2$.

Note que em particular tem-se

$$|u(T) - v(T)|_2 \leq |u(0) - v(0)|_2.$$

De modo que se $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ representa a aplicação de Poincaré, associada ao problema de Cauchy (2.3), tal que $K(u(0)) = u(T)$, então K é uma *contração* (não necessariamente estrita). Mas de acordo com o teorema do Ponto Fixo, dado na Proposição (3.1) do Capítulo 1, se mostrarmos que existe $R > 0$ tal que $K(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$, onde $\overline{B_R(0)}$ é a bola fechada de centro na origem e raio R, então K terá um ponto fixo pois para todo $n \in I\!N$ e $u_0 \in \overline{B_R(0)}$ teremos que $K^n(u_0) \in \overline{B_R(0)}$. Mostremos então a existência de tal R.

Tomemos u a solução única do problema (2.3). Então para quase todo $t \in I_i$, $i = 1, 2$ temos:

$$u_t(t) - \Delta_{p_i} u(t) = f_i(t).$$

Multiplicando-se esta equação por $u(t)$ (onde o termo multiplicação será também usado, no decorrer deste trabalho, para denotar o produto dualidade entre quaisquer espaços de Banach e seus respectivos duais topológicos) e usando a coercividade de $-\Delta_{p_i}$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + |u(t)|_{1,p_i}^{p_i} \leq (f_i(t), u(t)) \leq |f_i(t)|_{-1,p_i'} |u(t)|_{1,p_i}.$$

Logo segue da desigualdade de Young que se $t \in I_i$ então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + \frac{1}{p_i'}|u(t)|_{1,p_i}^{p_i} \leq \frac{1}{p_i'}|f_i(t)|_{-1,p_i'}^{p_i'}. \tag{2.6}$$

Mas $p_i \geq 2$ e portanto $W_0^{1,p_i}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ continuamente, isto é, existe $c_i > 0$ tal que para todo $u \in W_0^{1,p_i}(\Omega)$ tem-se:

$$|u|_2 \leq c_i |u|_{1,p_i} \quad \text{onde} \quad i = 1, 2.$$

Além disso, para todo número real $z \geq 0$, segue da Desigualdade de Young que:

$$z^2 \leq \frac{2}{p}z^p + \frac{p-2}{p}.$$

Assim, voltando a (2.6), concluímos que se $t \in I_i$ e $i = 1, 2$ então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + \frac{p_i - 1}{2c_i^{p_i}}|u(t)|_2^2 \leq \frac{1}{p_i'}|f_i(t)|_{-1,p_i'}^{p_i'} + \frac{p_i - 2}{2p_i' c_i^{p_i}}.$$

Multiplicando-se (produto usual) esta equação por $\exp(t(p_i - 1)/2c_i^{p_i})$ e integrando-se sobre I_i concluímos que

$$|u(T)|_2^2 \leq \exp(-(T - \bar{t})(p_2 - 1)/c_2^{p_2})|u(\bar{t})|_2^2 + \frac{2}{p_2'}|f_2|_{L^{p_2'}W^{-1,p_2'}}^{p_2'} + \frac{p_2 - 2}{p_2' c_2^{p_2}},$$

e

$$|u(\bar{t})|_2^2 \leq \exp(-\bar{t}(p_1 - 1)/c_1^{p_1})|u(0)|_2^2 + \frac{p_1 - 2}{p_1' c_1^{p_1}} + \frac{2}{p_1'}|f_1|_{L^{p_1'}W^{-1,p_1'}}^{p_1'}.$$

Logo, se

$$R^2 \geq \max_{i=1,2}\left\{[1 - \exp(-|I_i|(p_i - 1)/c_i^{p_i}]^{-1}\left(\frac{p_i - 2}{p_i' c_i^{p_i}}|I_i| + \frac{2}{p_i'}|f_i|_{L^{p_i'}W^{-1,p_i'}}^{p_i'}\right)\right\},$$

onde $|I_1| = \bar{t}$ e $|I_2| = T - \bar{t}$, e se $|u(0)|_2 \leq R$ então $|K(u_0)|_2 = |u(T)|_2 \leq R$. Concluímos que K tem um ponto fixo. Mostremos que ele é único.

Suponhamos então que u_0 e v_0 são dois pontos fixos de K e que u e v sejam as respectivas soluções de (2.3) tais que $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$. Logo para quase todo $t \in I_i$, $i = 1, 2$, tem-se:

$$\begin{cases} (u_t(t) - v_t(t)) - (\Delta_{p_i}u(t) - \Delta_{p_i}v(t)) = 0 \\ u(0) - v(0) = u(T) - v(T). \end{cases}$$

Multiplicando-se esta equação por $(u(t) - v(t))$, usando-se (1.2) e a monotonia de $-\Delta_{p_i}$, conclui-se que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|_2^2 + \alpha_i |u(t) - v(t)|_{1,p_i}^{p_i} \leq 0, \quad i = 1, 2.$$

Integrando-se esta desigualdade em I_i, somando-se as expressões resultantes em $i = 1, 2$ e usando-se o fato de que $u(0)$ e $v(0)$ são pontos fixos de K tem-se:

$$\sum_{i=1,2} \alpha_i |u - v|_{L^{p_i} W_0^{1,p_i}}^{p_i} \leq 0,$$

logo $u = v$.

A partir destes fatos, concluímos que para cada par $[f_1, f_2] \in L^{p_1'}(I_1; W^{-1,p_1'}(\Omega)) \times L^{p_2'}(I_2; W^{-1,p_2'}(\Omega))$ existe uma única solução u de (2.4).

Observação: Em Lions [10], página 236, podemos encontrar um teorema mais geral que implica a existência de solução do problema $u_t - \Delta_p u = f$ tal que $u(0) = u(T), p \geq 2$ e $f \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$. Porém, o tipo de demonstração que apresentamos aproveita melhor as propriedades do p-Laplaceano e por isso é mais simples.

O que faremos a seguir será definir o Operador Solução associado ao Problema (2.4) e mostrar que ele satisfaz certas propriedades que serão de fundamental importância para se concluir a existência de soluções do problema perturbado. Mas antes vamos especificar as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
L_i &= L^{p_i}(I_i; W_0^{1,p_i}(\Omega)), \\
L_i' &= L^{p_i'}(I_i; W^{-1,p_i'}(\Omega)), \\
Y_i &= L^{p_i}(I_i; L^{p_i}(\Omega)), \\
W_i &= \{w \in L_i; w_t \in L_i'\},
\end{aligned}$$

onde $i = 1, 2$; lembramos que de acordo com o Critério de Aubin-Lions, dado no Lema 1.1 segue que:

$$W_i \subset Y_i, \quad \text{compactamente}.$$

Assim, como para cada $[f_1, f_2] \in L_1' \times L_2'$ $\exists\, !$ u tal que $u|_{I_i} = u_i \in W_i$ e u_i é solução de

$$\begin{cases} (u_i)_t - \Delta_{p_i}(u_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \\ u_1(0) = u_2(T); \; u_1(\bar{t}) = u_2(\bar{t}) \end{cases}$$

e como $W_i \subset Y_i$ continuamente então podemos definir o Operador Solução S associado à (2.4) por

$$\begin{array}{rlcl} S: & L_1' \times L_2' & \rightarrow & Y_1 \times Y_2 \\ & [f_1, f_2] & \rightarrow & [u_1, u_2] \end{array} \tag{2.7}$$

Proposição 2.1: *S é completamente contínuo. Além disso existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que se $S[f_1, f_2] = [u_1, u_2]$ e $S[h_1, h_2] = [v_1, v_2]$ então:*

$$\sum_{i=1,2} \frac{\alpha_i}{p_i} |u_i - v_i|_{L_i}^{p_i} \leq \sum_{i=1,2} C_i |f_i - h_i|_{L_i'}^{p_i'} \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1,2} \frac{\alpha_i}{p_i} |u_i|_{L_i}^{p_i} \leq \sum_{i=1,2} C_i |f_i|_{L_i'}^{p_i'} \tag{2.9}$$

$$\left| \frac{d}{dt} u_i \right|_{L_i'} \leq |f_i|_{L_i'} + \left(\frac{p_i}{\alpha_i} \right)^{1/p_i'} \left(C_1 |f_1|_{L_1'}^{p_1'} + C_2 |f_2|_{L_2'}^{p_2'} \right)^{1/p_i'} \quad \textit{para} \quad i = 1, 2. \tag{2.10}$$

Corolário 2.2: *Se em (2.4) tivermos $\bar{t} = T$, isto é, se não houver troca de operadores, então*

$$\begin{array}{rlcl} S: & L_1' & \rightarrow & Y_1 \\ & f_1 & \rightarrow & u_1 \end{array} \quad \textit{será completamente contínuo e:}$$

$$\frac{\alpha_1}{p_1} |u - v|_{L_1}^{p_1} \leq C_1 |f - h|_{L_1'}^{p_1'}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\alpha_1}{p_1} |u|_{L_1}^{p_1} \leq C_1 |f|_{L_1'}^{p_1'}, \tag{2.12}$$

$$\left| \frac{d}{dt} u \right|_{L_1'} \leq \left(1 + C_1 \left(\frac{p_1}{\alpha_1} \right)^{1/p_1'} \right) |f|_{L_1'}. \tag{2.13}$$

Prova: Imediata à partir da Proposição 2.1.

Prova da Proposição 2.1: Subtraindo-se as correspondentes equações à u_i e v_i obtemos

$$(u_i - v_i)_t - (\Delta_{p_i} u_i - \Delta_{p_i} v_i) = f_i(t) - h_i(t), \quad i = 1, 2,$$

onde $u_1(0) - v_1(0) = u_2(T) - v_2(T)$ e $u_1(\bar{t}) - v_1(\bar{t}) = u_2(\bar{t}) - v_2(\bar{t})$; multiplicando-se a equação acima por $(u_i(t) - v_i(t))$, usando (1.2), a monotonia de $-\Delta_{p_i}$ e a desigualdade de Young concluímos que, para $\forall\, \varepsilon_i > 0$, tem-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_i(t) - v_i(t)|_2^2 + \left(\alpha_i - \frac{\varepsilon_i^{p_i}}{p_i}\right)|u_i(t) - v_i(t)|_{1,p_i}^{p_i} \leq \frac{1}{\varepsilon_i^{p_i'} p_i'}|f_i(t) - h_i(t)|_{-1,p_i'}^{p_i'}.$$

Integrando-se esta desigualdade em I_i, onde $i = 1, 2$, obtemos

$$\frac{1}{2}\left\{\left|u_2(T) - v_2(T)\right|_2^2 - \left|u_2(\bar{t}) - v_2(\bar{t})\right|_2^2\right\} + \left(\alpha_2 - \frac{\varepsilon_2^{p_2}}{p_2}\right)\left|u_2 - v_2\right|_{L_2}^{p_2} \leq \frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'} p_2'}\left|f_2 - h_2\right|_{L_2'}^{p_2'}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left|u_1(\bar{t}) - v_1(\bar{t})\right|_2^2 - \left|u_1(0) - v_1(0)\right|_2^2\right\} + \left(\alpha_1 - \frac{\varepsilon_1^{p_1}}{p_1}\right)\left|u_1 - v_1\right|_{L_1}^{p_1} \leq \frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'} p_1'}\left|f_1 - h_1\right|_{L_1'}^{p_1'}.$$

Somando-se estas duas expressões concluímos que

$$\sum_{i=1,2}\left(\alpha_i - \frac{\varepsilon_i^{p_i}}{p_i}\right)|u_i - v_i|_{L_i}^{p_i} \leq \sum_{i=1,2}\frac{1}{\varepsilon_i^{p_i'} p_i'}|f_i - h_i|_{L_i'}^{p_i'}$$

assim escolhendo-se $\varepsilon_i = (\alpha_i(p_i - 1))^{1/p_i}$ obtemos (2.8).

Lembrando que $S[0,0] = [0,0]$, (2.9) passa a ser conseqüência imediata de (2.8). E finalmente, para se obter (2.10), veja que de (2.3) e de (1.7) concluímos que se $t \in I_i$ então

$$|(u_i)_t(t)|_{-1,p_i'} \leq |f_i(t)|_{-1,p_i'} + |u_i(t)|_{1,p_i}^{p_i-1},$$

conseqüentemente

$$|(u_i)_t|_{L_i'} \leq |f_i|_{L_i'} + |u_i|_{L_i}^{p_i-1},$$

logo usando (2.9) nesta desigualdade obtemos (2.10).

Provadas as desigualdades (2.8) à (2.10) concluímos que $S : L_1' \times L_2' \to L_1 \times L_2 \subset Y_1 \times Y_2$ é um operador contínuo. Além disso de (2.9) e (2.10) segue que todo conjunto limitado B de $L_1' \times L_2'$ é levado a um conjunto limitado de $W_1 \times W_2$ através da S. Portanto $S(B)$ é relativamente compacto em $Y_1 \times Y_2$ e portanto S definido em (2.7) é completamente contínuo. $\square$

Observação 2.3: Note que se restringirmos o operador S tomando-o em:

$$\begin{array}{rlll} S: & L^2(I_1;L^2(\Omega))\times L^2(I_2;L^2(\Omega))\subset L_1'\times L_2' & \rightarrow & Y_1\times Y_2, \\ & [f_1,f_2] & \mapsto & [u_1,u_2] \end{array} \tag{2.14}$$

então S continuará sendo completamente contínuo e além disso as desigualdades (2.8), (2.9) e (2.10) serão válidas colocando-se $|f_i|_{L^2L^2}$ no lugar de $|f_i|_{L_i'}$, para $i=1,2$.

Uma vez estabelecidos estes resultados, estamos prontos para provar nosso primeiro resultado importante relativo ao Problema (0.1).

3. Soluções Periódicas de Problemas Perturbados com Mudanças Abruptas no Tempo

Teorema 3.1: *Sejam $p_i\geq 2$, $h_i\in L_i'$, $m_i\in L^\infty(I_i)$ e g_i uma função real contínua tal que para todo $\sigma\in I\!R$ e para determinados a_i e s_i satisfazendo $a_i\geq 0$ e $0\leq s_i<p_i-1$ tenhamos:*

$$|g_i(\sigma)|\leq a_i(|\sigma|^{s_i}+1). \tag{3.1}$$

Então o problema

$$\begin{cases} u_t(t,x)-\Delta_{p_1}(u(t,x))=m_1(t)g_1(u(t,x))+h_1(t,x) & ,t\in I_1, \quad x\in\Omega, \\ u_t(t,x)-\Delta_{p_2}(u(t,x))=m_2(t)g_2(u(t,x))+h_2(t,x) & ,t\in I_2, \quad x\in\Omega, \\ u(t,\cdot)|_{\partial\Omega}=0 & ,t\in(0,T), \\ u(0,x)=u(T,x) & , \quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

tem uma solução fraca.

Prova: Seja N_{H_i} o operador de Nemytskii associado à função $H_i(u,x,t,\lambda)=\lambda(m_i(t)g_i(u)+h_i(t,x))$, onde $\lambda\in[0,1]$ e $N_{H_i}(\lambda,u)(t,x)=H_i(u(t,x),t,x,\lambda)$. Então, sob as hipóteses do teorema segue que

$$\begin{array}{rlll} N_H=N_{H_1}\times N_{H_2}: & [0,1]\times Y_1\times Y_2 & \rightarrow & L_1'\times L_2', \\ & (\lambda;[u_1,u_2]) & \rightarrow & [\lambda(m_1(t)g_1(u_1)+h_1),\lambda(m_2(t)g_2(u_2)+h_2)] \end{array}$$

é contínuo e limitado. De fato, das condições impostas sobre g_i e do Lema 1.2 segue que o operador de Nemytskii associado a g_i, $N_{g_i}:Y_i\rightarrow L^{p_i/s_i}(I_i;L^{p_i/s_i}(\Omega))$, é um operador contínuo, limitado e satisfaz

$$|N_{g_i}(u)|_{L^{p_i/s_i}L^{p_i/s_i}}\leq a_i(|u|_{Y_i}^{s_i}+(|\Omega|\cdot|I_i|)^{s_i/p_i}).$$

Mas $\frac{p_i}{s_i} > \frac{p_i}{p_i - 1} = p_i'$. Logo N_{g_i} é também um operador limitado e contínuo quando visto como

$$N_{g_i} : Y_i \to L_i',$$

e além disso existem novas constantes, que denotaremos ainda por $a_i > 0,\ i = 1, 2$, tais que

$$|N_{g_i}(u)|_{L_i'} \leq a_i(|u|_{Y_i}^{s_i} + 1).$$

Assim, do fato de $\lambda \in [0,1]$ e de $m_i \in L^\infty(I_i)$, é fácil ver que N_{H_i} é contínuo e que

$$|N_{H_i}(u)|_{L_i'} \leq \lambda[a_i(|u|_{Y_i}^{s_i} + 1) + |h_i|_{L_i'}]. \tag{3.3}$$

Logo a composição

$$\begin{array}{rlcl} S \circ N_H : & [0,1] \times Y_1 \times Y_2 & \to & Y_1 \times Y_2, \\ & (\lambda; [u_1, u_2]) & \to & [v_1, v_2] \end{array} \tag{3.4}$$

onde v_1 e v_2 são soluções de

$$\begin{cases} (v_1)_t - \Delta_{p_1}(v_1) = N_{H_1}(\lambda, u_1), \\ (v_2)_t - \Delta_{p_2}(v_2) = N_{H_2}(\lambda, u_2), \\ v_1(0) = v_2(T);\ v_1(\bar{t}) = v_2(\bar{t}), \end{cases}$$

é um operador completamente contínuo. Se mostrarmos que $S \circ N_H(\lambda; \cdot)$ tem um ponto fixo então teremos provado o teorema. Para demonstrar a existência desse ponto fixo vamos usar a Teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder (veja Deimling [4], Capítulo 2, Seção 8).

Primeiramente suponhamos que $[u_1, u_2]$ é um ponto fixo de $S \circ N_H(\lambda, \cdot)$, para algum $\lambda \in [0,1]$. Então este par satisfaz

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} (u_i)_t - \Delta_{p_i}(u_i) = N_{H_i}(\lambda, u_i), \quad \text{onde} \quad i = 1, 2, \\ u_1(0) = u_2(T);\ u_1(\bar{t}) = u_2(\bar{t}). \end{cases}$$

Segue de (2.9) que

$$\sum_{i=1,2} \frac{\alpha_i}{p_i} |u_i|_{Y_i}^{p_i} \leq \sum_{i=1,2} C_i |N_{H_i}(u_i)|_{L_i'}^{p_i'}$$

e de (3.3) e do fato de $\lambda \in [0,1]$ que

$$\sum_{i=1,2} \frac{\alpha_i}{p_i} |u_i|_{Y_i}^{p_i} \leq \sum_{i=1,2} C_i [a_i(|u_i|_{Y_i}^{s_i} + 1) + |h_i|_{L_i'}]^{p_i'}]. \tag{3.5}$$

Vamos mostrar, por contradição, que exite $R > 0$ tal que se $[u_1, u_2]$ satisfaz (P_λ) então $|u_i|_{Y_i} \leq R$, para todo $\lambda \in [0,1]$ e $i = 1, 2$.

Suponhamos então que não existe tal R, ou seja, para cada $n \in I\!N$ $\exists\ \lambda_n \in [0,1]$ e $[u_{1,n}, u_{2,n}]$ solução de (P_{λ_n}) tal que $|u_{i,n}|_{Y_i} > n$ para algum $i \in \{1,2\}$.

Dividindo-se (3.5) por $(|u_{1,n}|_{Y_1}^{p_1' s_1} + |u_{2,n}|_{Y_2}^{p_2' s_2})$ e lembrando que $0 \leq s_i < p_i - 1$, vemos que para n grande existe um número $k > 0$ tal que

$$\sum_{i=1,2} \frac{\alpha_i}{p_i} \frac{|u_{i,n}|_{Y_i}^{p_i}}{|u_{1,n}|_{Y_1}^{p_1' s_1} + |u_{2,n}|_{Y_2}^{p_2' s_2}} \leq k. \tag{3.6}$$

Assim se $|u_{1,n}|_{Y_1} \to \infty$, quando $n \to \infty$, e $|u_{2,n}|_{Y_2}$ for limitado teremos

$$\frac{|u_{1,n}|_{Y_1}^{p_1}}{|u_{1,n}|_{Y_1}^{s_1 p_1'} + |u_{2,n}|_{Y_2}^{s_2 p_2'}} = \frac{1}{|u_{1,n}|_{Y_1}^{s_1 p_1' - p_1} + |u_{2,n}|_{Y_2}^{s_2 p_2'} |u_{1,n}|_{Y_1}^{-p_1}} \to \infty, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

pois $s_1 p_1' - p_1 < 0$ o que contradiz (3.6). Da mesma forma se supusermos que $|u_{1,n}|_{Y_1}$ é limitado e que $|u_{2,n}|_{Y_2} \to \infty$ também chegamos a uma contradição. Suponhamos então que para $i = 1, 2$ $|u_{i,n}|_{Y_i} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Se existir $\gamma > 0$ tal que para n suficientemente grande tenhamos

$$\frac{|u_{2,n}|_{Y_2}^{s_2 p_2'}}{|u_{1,n}|_{Y_1}^{p_1}} \geq \gamma,$$

então

$$|u_{1,n}|_{Y_1} \leq \gamma^{-1/p_1} |u_{2,n}|_{Y_2}^{s_2 p_2'/p_1}.$$

Isto implica que

$$\frac{|u_{1,n}|_{Y_1}^{p_1' s_1}}{|u_{2,n}|_{Y_2}^{p_2}} \leq \gamma^{-p_1' s_1/p_1} |u_{2,n}|^{s_2 p_2' s_1 p_1'/p_1 - p_2}.$$

Mas $s_1 p_1'/p_1 < 1$ e $s_2 p_2' - p_2 < 0$, e assim $|u_{1,n}|_{Y_1}^{p_1' s_1}\ |u_{2,n}|_{Y_2}^{-p_2} \to 0$ e então

$$\frac{|u_{2,n}|_{Y_2}^{p_2}}{|u_{1,n}|_{Y_1}^{p_1' s_1} + |u_{2,n}|_{Y_2}^{p_2' s_2}} \to \infty$$

quando $n \to \infty$, o que novamente constitui uma contradição à (3.6). Portanto, $\exists\ R > 0$ tal que se $\lambda \in [0,1]$ e $[u_1, u_2]$ é solução de (P_λ) e para $i = 1, 2$ tem-se $|u_i|_{Y_i} \leq R$.

Assim se tomarmos $\hat{R} > R$ então não existe $[u_1, u_2] \in Y_1 \times Y_2$ solução de $(I - S \circ N_H)(\lambda; [u_1, u_2]) = [0, 0]$ tal que $|u_i|_{Y_i} = \hat{R}$; além disso lembremos que $S \circ N_H$ é operador completamente contínuo. Assim podemos tomar

$$d(I - S \circ N_H(\lambda, \cdot),\ B_{\hat{R}}(0), [0, 0]) \in \mathbb{Z}$$

o grau topológico de $I - S \circ N_H(\lambda, \cdot)$, na bola $B_{\hat{R}}(0)$, com relação à $[0, 0]$, e este número não depende de λ já que o grau é invariante por homotopias. Mas calculando-se o grau quando $\lambda = 0$ concluímos que

$$d(I - S \circ N_H(0, \cdot), B_{\hat{R}}(0), [0, 0]) = 1$$

já que $S \circ N_H(0; [u_1, u_2]) \equiv [0, 0]$ e $d(I, B_{\hat{R}}(0), [0, 0]) = 1$. Portanto $d(I - S \circ N_H(\lambda, \cdot), B_{\hat{R}}(0), [0, 0]) = 1$ para todo $\lambda \in [0, 1]$ e em particular para $\lambda = 1$. Logo $S \circ N_H(1; \cdot)$ tem um ponto fixo e portanto (3.2) tem uma solução fraca. $\square$

Observação 3.2: Segue, como casos particulares da demonstração anterior, que os problemas abaixo têm solução:

$$\text{a)} \begin{cases} u_t - \Delta_{p_1} u = m_1(t) g_1(u) + h_1(t, \cdot), & t \in [0, T] \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

onde p_1, m_1, g_1 e h_1 são como anteriormente e $\bar{t} = T$:

$$\text{b)} \begin{cases} u_t - \Delta_p u = m(t) g(t, u) + h(t, \cdot), & t \in [0, T] \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

e $p = p_1 = p_2 \geq 2,\ m \in L^\infty(0, T),\ h \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ e

$$g(t, u) = \begin{cases} g_1(u) & \text{se} \quad t \in I_1 \\ g_2(u) & \text{se} \quad t \in I_2 \end{cases}$$

com g_1 e g_2 como anteriormente.

Com pequenas adaptações ao que fizemos anteriormente, podemos mostrar o seguinte resultado abstrato:

Teorema 3.3: *Sejam V_i um espaço de Banach reflexivo separável, V_i' seu dual topológico e H um espaço de Hilbert tais que $V_i \subset H \subset V_i'$, com inclusões contínuas e densas e $i = 1, 2$. Seja também*

$$A_i : V_i \to V_i'$$

um operador satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) *Monotonia forte: Para todo $u, v \in V_i$ existem $p_i \geq 2$ e $\alpha_i > 0$ tais que*

$$(A_i u - A_i v, u - v)_{V_i', V_i} \geq \alpha_i |u - v|_{V_i}^{p_i},$$

(ii) *Hemicontinuidade: Para todo $u, v, w \in V_i$ fixos, e $\lambda \in I\!R$ a aplicação abaixo é contínua*

$$\lambda \mapsto (A_i(u + \lambda v), w)_{V_i', V_i},$$

(iii) *Coercividade: $\exists\ \beta_i \geq 0$ tal que para todo $u \in V_i$,*

$$(A_i u, u)_{V_i', V_i} \geq \alpha_i |u|_{V_i}^{p_i} - \beta_i,$$

(iv) *Limitação: Existem $\gamma_i, \delta_i \geq 0$ tais que para todo $u \in V_i$*

$$|A_i(u)|_{V_i'} \leq \gamma_i |u|_{V_i}^{p_i - 1} + \delta_i.$$

E finalmente sejam X_i um espaço de Banach tal que $V_i \subset X_i$ compactamente e

$$B_i : L^{p_i}(I_i; X_i) \to L^{p_i'}(I_i, V_i')$$

um operador contínuo, limitado e satisfazendo

$$|B_i(u)|_{L^{p_i'} V_i'} \leq a_i(|u_i|_{L^{p_i} X_i}^{s_i} + 1)$$

para algum $a_i \geq 0$ e $0 \leq s_i \leq p_i - 1$, onde $I_i = [0, \bar{t})$ e $I_2 = [\bar{t}, T)$. Então existe $u \in C([0, T]; H)$ tal que

$$u_i = u | I_i \in W_i = \{w \in L^{p_i}(I_i; V_i); w_t \in L^{p_i'}(I_i, V_i')\}$$

e u é solução fraca de

$$\begin{cases} u_t + A_1 u = B_1(u), \\ u_t + A_2 u = B_2(u) \\ u(0) = u(T). \end{cases}$$

Observação 3.4: Os exemplos (1.8), (1.10) e o exemplo (1.9), com a condição que $\lambda_2^2 < 4\lambda\lambda_1$, e que $[\lambda_2(p_2-2)]^2 - 4\lambda\lambda_1, (p_1-2)(p-2) \leq 0$, fornecem operadores, diferentes de $-\Delta_p$ que satisfazem as condições impostas sobre $A_i, i = 1, 2$, no Teorema 3.3. Para isto basta considerar cada funcional dado como sendo $\phi : D(\phi) \to I\!R$, e não mais $\phi : D\phi \subset H \to R \cup \{\infty\}$, de modo que $\phi \in C^1(D\phi)$.

Observação: Como $S \circ N_H(1, \cdot)$ é um operador completamente contínuo, poderíamos ter usado o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para mostrar que $S \circ N_H(1, \cdot)$ tem um ponto fixo. Mas neste caso precisaríamos impôr que, para todo $i, j = 1, 2$, tivéssemos $0 \leq s_j < p_i/p_j'$, o que é muito mais restritivo que $0 \leq s_j < p_j/p_j'$ quando $j = 1, 2$, isto é, $0 \leq s_j < p_j - 1$.

Nos nossos próximos resultados veremos que é possível obter soluções para (0.1) mesmo que g_i tenha crescimento superior à $p_i - 1$. Primeiramente vamos manter a parte principal da equação igual à $-\Delta_p$ durante todo intervalo $(0, T)$e vamos permitir que haja trocas abruptas apenas na perturbação da equação.

Assim, consideremos inicialmente o problema:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta_p u(t,x) = m(t)g(u(t,x)) + h(t,x) & , \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \\ u(0,x) = u(T,x) & , \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

onde $p \geq 2, h \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$, $m \in L^\infty(0,T)$ e g é uma função real contínua tal que para determinados $a > 0$ e $s \geq 0$ tenhamos

$$|g(\sigma)| \leq a(|\sigma|^s + 1) \qquad \forall\, \sigma \in I\!R.$$

Provaremos então o seguinte resultado:

Teorema 3.5: *Nas condições descritas acima, se $|m|_\infty$ for suficientemente pequeno e se*

$$p - 1 \leq s < p - 1 + \frac{2p}{N} \quad e \quad N > p, \qquad ou\ se$$
$$p - 1 \leq s < p + 1 \quad e \quad N \leq p,$$

então (3.7) vai admitir uma solução fraca.

[*Note que a Observação* 3.2, *ítem* a), *nos dá existência de solução fraca quando* $s < p-1$].

Vale avisar ao leitor que, para que fique claro que nosso resultado depende da pequenez de $|m|_\infty$, certas constantes que aparecerão no decorrer da demonstração terão suas dependências devidamente explicitadas.

Antes de demonstrar o Teorema 3.5 vamos fazer algumas considerações com relação à

$$\begin{array}{rccl} S: & L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) & \to & L^p(0,T,W_0^{1,p}(\Omega)) \\ & f & \mapsto & u \end{array}$$

o operador solução associado ao problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f, \\ u(0) = u(T). \end{cases} \tag{3.8}$$

Do Corolário 2.2, segue que S satisfaz as desigualdades (2.11) à (2.13) e que para todo $q > 1$ tal que $1 - \dfrac{N}{p} > -\dfrac{N}{q}$ (em particular para $p = q$)

$$S : L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) \to L^p(0,T;L^q(\Omega))$$

é operador completamente contínuo.

Mas se $s > p-1$ e $u \in L^p(0,T;L^q(\Omega))$ então $g(u) \in L^{p/s}(0,T;L^{q/s}(\Omega) \not\subset L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)$ pois $p' > p/s$. Assim para podermos trabalhar com $s \geq p-1$ teremos que explorar um pouco mais as propriedades do Operador Solução S. Vejamos então o seguinte resultado:

Proposição 3.6: *O Operador Solução* S *associado à* (3.8)

$$\begin{array}{rccl} S: & L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) & \to & L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \\ & f & \mapsto & u \end{array}$$

é um operador contínuo e limitado.

Prova: Mostremos primeiramente a continuidade de S; para isso sejam $f, h \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ tais que $u = S(f)$ e $v = S(h)$. (Observe que S está bem definida pois se u é solução fraca de (3.8) então $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$).

Subtraindo as correspondentes equações associadas a u e v e multiplicando a equação resultante por $(u(t)-v(t))$ concluímos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-v(t)|_2^2 \leq \frac{1}{p'\alpha^{1/(p-1)}}|f(t)-h(t)|_{-1,p'}^{p'}.$$

Integrando-se em $(\tau,t)\subset(0,T)$ obtemos

$$|u(t)-v(t)|_2^2 \leq |u(\tau)-v(\tau)|_2^2 + \frac{2}{p'\alpha^{1/(p-1)}}|f-h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{p'} \tag{3.9}$$

Se mostrarmos que a aplicacão $f \mapsto S(f)(0) = u(0)$ é contínua então, fazendo $\tau = 0$ em (3.9), concluiremos a continuidade de S em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Para isto, observemos que como $u, v \in W = \{w \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega));\ w_t \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))\}$ então $u-v \in C([0,T];L^2(\Omega))$ e portanto existe $t_0 \in [0,T]$ tal que

$$|u(t_0)-v(t_0)|_2^2 = T^{-1}\int_0^T |u(\sigma)-v(\sigma)|_2^2 dt. \tag{3.10}$$

Mas $p \geq 2$ e portanto existe uma constante $c_1 = c_1(\Omega,T) > 0$ tal que

$$|\cdot|_{L^2L^2} \leq c_1|\cdot|_{L^pW_0^{1,p}}.$$

A partir de (2.11) (associado à p) concluímos que

$$|u-v|_{L^2L^2} \leq c_1\left(C_1\frac{p}{\alpha}\right)^{1/p}|f-h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{1/(p-1)}. \tag{3.11}$$

Voltando à (3.9), se tomarmos $t=T$, $\tau = t_0$ e além disso usarmos (3.10) e (3.11) teremos que:

$$|u(T)-v(T)|_2^2 \leq T^{-1}c_1^2\left(C_1\frac{p}{\alpha}\right)^{2/p}|f-h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{2/(p-1)} + \frac{2}{p'\alpha^{1/(p-1)}}|f-h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{p'}.$$

Mas $S(f)(0) = u(0) = u(T)$ e $S(h)(0) = v(0) = v(T)$, logo temos a continuidade requerida e mais, se

$$c_2 = T^{-1}c_1^2(C_1p/\alpha)^{2/p} \quad \text{e} \quad c_3 = 2(p'\alpha^{1/(p-1)})^{-1}$$

então

$$|S(f)-S(h)|_{L^\infty L^2}^2 \leq c_2|f-h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{2/(p-1)} + c_3|f-h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{p'}; \tag{3.12}$$

em particular $S(0) = 0$ e portanto

$$|S(f)|^2_{L^\infty L^2} \leq c_2 |f|^{2/(p-1)}_{L^{p'}W^{-1,p'}} + c_3 |f|^{p'}_{L^{p'}W^{-1,p'}}. \qquad \square \tag{3.13}$$

Observação 3.7: Como na Observação 2.3, aqui também podemos restringir $S : L^2(0,T;L^2(\Omega)) \to L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ que S continuará sendo operador contínuo e limitado e as desigualdades (3.12) e (3.13) ainda serão válidas se pusermos $|f|_{L^2L^2}$ no lugar de $|f|_{L^{p'}W^{-1,p'}}$.

Proposição 3.8: *Sejam $p, q \geq 2$ tais que $1 - \frac{N}{p} > -\frac{N}{q}$. Se $\theta \in]0,1[$ e*

$$k(\theta) = \frac{p}{\theta} \quad , \quad r(\theta, q) = \frac{2q}{q(1-\theta) + 2\theta} \tag{3.14}$$

então podemos definir o Operador Solução S associado à (3.8) por

$$\begin{array}{rccl} S : & L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) & \to & L^{k(\theta)}(0,T,L^{r(\theta,q)}(\Omega)) \\ & f & \mapsto & S(f) \end{array} \tag{3.15}$$

e este será ainda completamente contínuo.

Prova: Seja $X = L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;L^q(\Omega))$. Então segue das considerações anteriores à Proposição 3.6 e da própria Proposição 3.6 que $S : L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) \to X$ é um operador contínuo e limitado.

Mas por interpolação de espaços temos que se k e r forem dados por (3.14) então a inclusão abaixo é contínua

$$X \subset L^{k(\theta)}(0,T;L^{r(q,\theta)}(\Omega)) \qquad \text{e}$$

$$|u|_{L^{k(\theta)}L^{r(q,\theta)}} \leq |u|^\theta_{L^pL^q} |u|^{1-\theta}_{L^\infty L^2}, \tag{3.16}$$

logo o operador S definido em (3.15) é limitado e contínuo. Para completar a demonstração desta proposição mostremos que se B é conjunto limitado de $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ então existe seqüência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $\{S(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é seqüência convergente de $L^{k(\theta)}(0,T;L^{r(\theta,q)}(\Omega))$.

Para ver isso observemos primeiramente que de (2.9) e (2.10) tem-se que o operador S, quando atuando como operador de $L^{p'}(0,T;\ W^{-1,p'}(\Omega))$ em $W = \{w \in L^p(0,T;W^{1,p}_0(\Omega));\ w_t \in L^{p'}(0,T;\ W^{-1,p'}(\Omega))\}$, é um operador limitado.

Assim se B é conjunto limitado então $S(B)$ é limitado em W. Mas W é espaço reflexivo, logo existe seqüência $\{f_n\}_{n\in \mathbb{N}} \subset B$ e $u \in W$ tais que

$$S(f_n) = u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Além disso, segue do Lema 1.1 que existe subseqüência que denotaremos ainda por $\{f_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ tal que

$$S(f_n) = u_n \to u \quad \text{em} \quad L^p(0,T;L^q(\Omega)),$$

mais ainda, temos de (1.1) que $W \subset C([0,T];L^2(\Omega))$ e que portanto $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Logo de (3.16) concluímos que

$$|S(f_n) - u|_{L^{k(\theta)}L^{r(q,\theta)}} \le |S(f_n) - u|^{\theta}_{L^pL^q}|S(f_n) - u|^{1-\theta}_{L^\infty L^2}.$$

Como $\theta \in]0,1[$ concluímos que $\{S(f_n)\}_{n\in \mathbb{N}}$ é seqüência convergente de $L^{k(\theta)}(0,T;\ L^{r(q,\theta)}(\Omega))$. $\square$

Vamos então demonstrar o teorema.

Prova do Teorema 3.5: Seja N_H o operador de Nemytskii associado à função $H(u,x,t) = m(t)g(u) + h(t,x)$. Queremos encontrar $\theta \in (0,1)$ tais que se $k = k(\theta)$ e $r = r(q,\theta)$ então

$$\begin{array}{rccc} S\circ N_H: & L^k(0,T;L^r(\Omega)) & \to & L^k(0,T,L^r(\Omega)) \\ & u & \mapsto & S\circ N_H(u) = v, \end{array} \tag{3.17}$$

onde v é a solução de

$$\begin{cases} v_t - \Delta_p v = m(t)g(u) + h(t), \\ v(0) = v(T), \end{cases}$$

é um operador completamente contínuo.

Em primeiro lugar vejamos que, como no Teorema 3.1, se tivermos $L^{k/s}(0,T;L^{r/s}(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ continuamente então teríamos que

$$N_H : L^k(0,T;L^r(\Omega)) \to L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$$

seria um operador contínuo, limitado e além disso satisfaria

$$|N_H(u)|_{L^{p'}W^{-1,p'}} \leq c_4|m|_\infty a(|u|^s_{L^kL^r} + |\Omega|^{s/r}T^{s/k}) + |h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}, \tag{3.18}$$

com $c_4 = c_4(\Omega, T) > 0$ tal que

$$|\cdot|_{L^{p'}W^{-1,p'}} \leq c_4|\cdot|_{L^{k/s}L^{r/s}}.$$

Logo, se θ for tal que N_H é contínuo e satisfaz (3.18) então $S \circ N_H$ definido em (3.17) estará bem definido e será completamente contínuo.

Como $s \geq p-1$, se pudermos escolher

$$s \leq \min\left\{\frac{p-1}{\theta},\ \frac{2(q-1)}{q(1-\theta)+2\theta}\right\} = s^*$$

então teremos as seguintes inclusões contínuas

$$L^{k/s}(0,T;L^{r(\theta,q)/s}(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;L^{q'}(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)), \tag{3.19}$$

de fato, $\dfrac{k}{s} = \dfrac{p}{\theta s} \geq p'$ e $\dfrac{r}{s} \geq \dfrac{2q}{q(1-\theta)+2\theta}\left[\dfrac{2(q-1)}{q(1-\theta)+2\theta}\right]^{-1} = q'$, o que nos dá a primeira inclusão contínua. A segunda inclusão segue de

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^{q'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega).$$

Assim vamos procurar um θ ótimo entre 0 e 1 para que s^* seja o maior possível. Para isso vamos analisar as funções:

$$f_1(\theta) = \frac{p-1}{\theta} \quad \text{e} \quad f_2(\theta) = \frac{2(q-1)}{q(1-\theta)+2\theta}.$$

Como $q \geq 2$ segue que f_2 é uma função crescente em θ; já f_1 é estritamente decrescente. Logo se f_1 e f_2 se interceptarem num ponto θ_0 este será único. Fazendo as contas, concluímos que este ponto existe e é dado por:

$$\theta_0(q) = \frac{q(p+1)-2q}{q(p+1)-2p} \in (0,1). \tag{3.20}$$

Assim, θ_0 dado em (3.20) fornece o valor para o qual s^* será máximo e este é dado por:

$$s^* = \frac{p-1}{\theta_0(q)} = p+1-2\frac{p}{q}.$$

Então, lembrando que $1-\dfrac{N}{p} > -\dfrac{N}{q}$ e que $q \geq 2$ temos dois casos a considerar:

i) Se $N \leq p$ então $2 \leq q < \infty$ e, portanto, fazendo $q \to +\infty$, podemos tomar

$$s^* < p + 1,$$

ii) Se $N > p$ então $2 \leq q < \dfrac{Np}{N-p}$ e portanto

$$s^* < p - 1 + \frac{2p}{N}.$$

Concluindo, se $s \in [p-1, p-1+2p/N)$ e $N > p$ ou se $s \in [p-1, p+1)$ e $N \leq p$ então com a escolha acima de q nós encontramos k e r tais que a inclusão dada em (3.19) é contínua e portanto para estes valores de k e r, $S \circ N_H$ definida em (3.17), está bem definida e é completamente contínua, como queríamos.

Nosso próximo passo será mostrar que existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $S \circ N_H(\overline{B_R(0)}) \subset (\overline{B_R(0)})$, para então concluir, à partir do Teorema do Ponto Fixo de Schauder, que $S \circ N_H$ tem um ponto fixo e portanto (3.7) tem uma solução fraca.

Com a ajuda de (2.12), (3.13), (3.16), (3.18) e da desigualdade de Young concluímos que se $|u|_{L^kL^r} \leq R$, qualquer que seja $R > 0$, então

$$|S \circ N_H(u)|_{L^kL^r} \leq c_5 R^{sk_2} + c_6 \qquad \text{onde} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= 1/(p-1)\ ,\ k_2 = (p(1-\theta_0) + 2\theta_0)/2(p-1) \\
c_5 &= \left(\frac{c_1 p}{\alpha}\right)^{\frac{\theta}{p}} \Big[(2(2c_2)^{1/2})^{1-\theta}(2c_4|m|_\infty a)^{k_1}\frac{k_1}{k_2} + (2(2c_3)^{1/2})^{1-\theta}(2c_4|m|_\infty a)^{k_2}\Big] \\
c_6 &= \left(\frac{c_1 p}{\alpha}\right)^{\frac{\theta}{p}} \Big\{(2(2c_2)^{1/2})^{1-\theta}\Big[(2c_4|m|_\infty a)^{k_1}\frac{(k_2-k_1)}{k_2} + (2(2c_7 + |h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}))^{k_1}\Big] \\
&\quad + (2c_3)^{1/2})^{1-\theta}(2(c_7 + |h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}))^{k_2}\Big\} \\
c_7 &= c_4|m|_\infty a|\Omega|^{s/r}T^{s/k}.
\end{aligned}$$

Assim se for possível escolher $R > 0$ tal que, por exemplo,

$$c_6 \leq \frac{R}{2} \quad \text{e} \quad c_5 R^{sk_2} \leq \frac{R}{2} \tag{3.22}$$

então $S \circ N_H(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$.

Mas $s \geq p-1$ e portanto $sk_2 \geq \frac{1}{2}(p(1-\theta_0)+2\theta_0) \geq (1-\theta_0)+\theta_0 = 1$. Logo escolhendo R suficientemente grande e c_5 suficientemente pequeno (3.22) será satisfeita. Mas pela forma como definimos c_5, basta que $|m|_\infty$ seja suficientemente pequeno que c_5 também o será e o resultado está concluído. □

Agora vamos dar condições suficientes para que (0.1) tenha soluções fortes.

Teorema 3.9: *Suponhamos que no problema* (3.7) *tenhamos* $p \geq 2$, $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $m \in L^\infty(0,T)$ *e* g *contínua tal que* $|g(\sigma)| \leq a(|\sigma|^s+1)$ *para todo* $\sigma \in I\!R$ *e algum* $a \geq 0$. *Então, se* s *satisfizer uma das condições abaixo,* (3.7) *terá uma solução forte. As condições são:*

a) $0 \leq s \leq \frac{p}{2}$,

b) $\frac{p}{2} \leq s \leq \frac{p}{2}+1$, $N \leq p$ *e* $|m|_\infty$ *é suficientemente pequeno,*

c) $\frac{p}{2} \leq s \leq \frac{p}{2}+1-\frac{(N-p)}{N}$, $N > p$ *e* $|m|_\infty$ *é suficientemente pequeno.*

Prova: Em primeiro lugar note que se $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ então $h \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ pois $p \geq 2 \geq p'$.

Assim se u é solução fraca de (3.7) e se $g(u) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ então $f = N_H(u) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e de acordo com a Proposição 2.1 do Capítulo 1 teremos que $u(0) \in W_0^{1,p}(\Omega), u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e (3.7) será satisfeita em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ isto é, u será uma solução forte de (3.7).

Para demonstrarmos nosso resultado precisamos saber apenas quais os valores de s para os quais (3.7) tem solução fraca u e $g(u) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

No primeiro caso temos $s \leq p/2$, e então $s \leq p-1$ pois $p \geq 2$. Logo, de acordo com a Observação 3.2 ítem a), (3.7) tem uma solução fraca u e $u \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$. Como $\frac{p}{s} \geq 2$ concluímos que $g(u) \in L^{p/s}(0,T;L^{p/s}(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Para os casos onde $s \geq p/2$, se procedermos como no Teorema 3.5, mas desta vez procurando $k,r > 0$ tais que $X \subset L^k(0,T;L^r(\Omega))$ e $L^{k/s}(0,T;L^{r/s}(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$, tais que tenhamos

$$\begin{array}{rccl} S: & L^2(0,T;L^2(\Omega)) & \to & L^k(0,T,L^r(\Omega)) \\ & f & \mapsto & S(f)=u, \end{array}$$

completamente contínuo e

$$\begin{array}{rccc} N_H: & L^k(0,T;L^r(\Omega)) & \to & L^2(0,T,L^2(\Omega)) \\ & u & \mapsto & N_H(u) \end{array}$$

contínuo e limitado, concluiremos que, quando m e s satisfizerem as hipóteses b) ou c) do Teorema, então (3.7) terá uma solução forte. □

Teorema 3.10: Se no Teorema 3.1 um dos s_j satisfizer:

$$p_j - 1 \leq s_j < p_j + 1 \quad \text{e} \quad N \leq p_j, \quad \text{ou}$$
$$p_j - 1 \leq s_j < p_j - 1 + 2\frac{p_j}{N} \quad \text{e} \quad N > p_j,$$

então o problema (3.2) terá solução fraca desde que $|m_1|_\infty$ e $|m_2|_\infty$ sejam suficientemente pequenos.

Se além dessas hipóteses tivermos que para $j = 1, 2,\ h_j \in L^2(I_j, L^2(\Omega))$ e

$$s_j \leq \frac{p_j}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{p_j}{2} \leq s_j < \frac{p_j}{2} + 1 \quad \text{e} \quad N \leq p_j$$
$$\text{ou} \qquad \frac{p_j}{2} \leq s_j < \frac{p_j}{2} + 1 - \frac{(N - p_j)}{N} \quad \text{e} \quad N > p_j,$$

então a solução de (0.1) será forte.

Prova: Análoga a demonstração do Teorema 3.5.

Observação: Se ao invés de $-\Delta_p$, com a condição de contorno de Dirichlet, trabalharmos com qualquer dos operadores fornecidos pela Observação 3.4 então nas condições dos Teoremas 3.5 ou 3.9 o problema (3.7) associado a estes novos operadores ainda terá solução.

4. O Caso Semilinear

Uma situação especial ocorre quando $p = 2$, pois neste caso $\Delta_2 = \Delta =$ operador de Laplace, que é um operador linear. O Operador Solução S, associado ao problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = u(T), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ poderá ser pensado como atuando nos seguintes espaços:

$$\begin{array}{rlcl} S: & L^2(0,T;L^2(\Omega)) & \to & L^\infty(0,T,L^q(\Omega)), \\ & f & \mapsto & u. \end{array} \tag{4.2}$$

Além disso será um operador completamente contínuo desde que $q > 1$ e $1 - \dfrac{N}{p} > -\dfrac{N}{q}$. Assim em nosso próximo resultado seremos capazes de mostrar que existe uma solução forte para

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta(u(t,x)) = h(t,x) + m(t)g(u(t,x)) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0,x) = u(T,x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

quando s assume valores superiores aos fornecidos pelo Teorema 3.5.

Teorema 4.1: *Sejam $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $m \in L^\infty(0,T)$ e g uma função real contínua tal que $|g(v)| \leq a(|v|^s + 1)$, para todo $v \in I\!R$. Se $|m|_\infty$ for suficientemente pequeno e se*

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & N = 1,2 \quad e \quad s \geq 1, \quad ou, \\ \text{b)} & N > 2 \quad e \quad 1 \leq s \leq 1 + \dfrac{2}{N-2}, \end{array}$$

então o problema (4.3) terá uma solução forte.

Prova: Vamos mostrar em primeiro lugar que S definido em (4.2) é um operador bem definido e completamente contínuo. Note que como Δ é linear então S também o será, portanto, neste caso, os conceitos de continuidade e limitação são equivalentes. Assim, se mostrarmos que

$$\begin{array}{rlcl} S: & L^2(0,T;L^2(\Omega)) & \to & W^\infty = \{w \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)); w_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\} \\ & f & \mapsto & u, \end{array}$$

é um operador limitado, seguirá do Lema 1.1 que S definido em (4.2) será completamente contínuo.

Se voltarmos à Proposição 2.3 do Capítulo 1 veremos que se u é solução de $u_t - \Delta u = f$ então $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ para todo $t > 0$. Além disso quando $u(0) \in H_0^1(\Omega)$ então a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \phi: & [0,T] & \rightarrow & R \\ & t & \mapsto & \phi(u(t)) = \frac{1}{2}|u(t)\Big|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{array}$$

será absolutamente contínua, $u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ (e conseqüentemente $-\Delta u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$) e também para quase todo $t \in (0,T)$ teremos

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t)) = (-\Delta u(t), u_t(t))_{L^2(\Omega)}.$$

Assim, se multiplicarmos (4.3) por $u_t(t)$ (produto interno do $L^2(\Omega)$), usarmos (4.4) e a desigualdade de Young, concluímos que para quase todo $t \in (0,T)$ tem-se:

$$\frac{1}{2}|u_t(t)|_2^2 + \frac{d}{dt}\phi(u(t)) \leq \frac{1}{2}|f(t)|_2^2, \tag{4.4}$$

logo integrando esta equação de t_0 a t, onde $0 \leq t_0 \leq t \leq T$, obtemos

$$|u(t)|^2_{H_0^1} \leq |u(t_0)|^2_{H_0^1} + |f|^2_{L^2L^2}.$$

Repetindo o argumento usado na Proposição 3.6 para mostrar (3.12), com a ajuda de (2.12) nós concluímos que para todo $t \in [0,T]$ tem-se:

$$|u(t)|^2_{H_0^1} \leq (c_1^2 T^{-1} + 2)|f|^2_{L^2L^2}$$

onde $c_1 = c_1(\Omega) > 0$ é tal que

$$|\cdot|_{H^{-1}} \leq c_1|\cdot|_{L^2}.$$

Logo, vale que

$$|S(f)|_{L^\infty H_0^1} \leq (c_1^2 T^{-1} + 2)^{1/2}|f|_{L^2L^2}.$$

Mas, por (2.13), temos

$$|\frac{d}{dt}S(f)|_{L^2H^{-1}} \leq \left(1 + C_1\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\right)|f|_{L^2H^{-1}} \leq c_1\left(1 + C_1\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\right)|f|_{L^2L^2},$$

e portanto S é uma aplicação contínua de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ em W^∞. Conseqüentemente, S definido em (4.2) é operador completamente contínuo, como queríamos provar.

Por outro lado se $u \in L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$, para algum q tal que $1-\dfrac{N}{2} > -\dfrac{N}{q}$, então $g(u) \in L^\infty(0,T;L^{q/s}(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$ se $\dfrac{q}{s} \geq 2$, ie., $s \leq q/2$. Neste caso, como $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, a aplicação de Nemytskii $N_H(u)(x,t) = m(t)g(u(x,t)) + h(x,t)$ será contínua e limitada quando atuando como

$$N_H : L^\infty(0,T;L^q(\Omega)) \to L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Além disso

$$|N_H(u)|_{L^2L^2} \leq |m|_\infty a c_2^s |u|^s_{L^\infty L^q} + (a|\Omega|^{1/2} + |h|_{L^2L^2})$$

onde $c_2 = c_2(\Omega) > 0$ é tal que

$$|\cdot|_{2s} \leq c_2|\cdot|_q.$$

Logo, a composição

$$S \circ N_H : L^\infty(0,T;L^q(\Omega)) \to L^\infty(0,T;L^q(\Omega))$$

será completamente contínua e satisfará

$$|S \circ N_H(u)|_{L^\infty L^q} \leq c_4|u|^s_{L^\infty L^q} + c_5,$$

com $c_4 = c_3(c_1^2T^{-1}+2)^{1/2}|m|_{L^\infty} a c_2^s$, $c_5 = c_3(c_1^2T^{-1}+2)^{1/2}(a|\Omega|^{1/2} + |h|_{L^2L^2})$ e $c_3 = c_3(\Omega) > 0$ tal que

$$|\cdot|_q \leq c_3|\cdot|_{H_0^1}.$$

Assim, como no Teorema 3.5, se tomarmos R suficientemente grande para que $R \geq 2c_5$ e se $|m|_\infty$ for suficientemente pequeno para que $c_4R^s \leq \dfrac{R}{2}$, então $c_4R^s + c_5 \leq R$. Logo teremos que $S \circ N_H(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$ e portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder, $S \circ N_H$ terá um ponto fixo.

Assim, só falta analisar os valores máximos que q, e conseqüentemente s, podem assumir para que a análise permaneça verdadeira.

Observamos que se $N \leq 2$, isto é, $N = 1, 2$, q pode ser tão grande quanto se queira e portanto podemos tomar qualquer $s \in [1,\infty)$.

Se $N > 2$ então devemos tomar $1 \leq q < \dfrac{2N}{N-2}$ e, portanto, $1 \leq s < \dfrac{N}{N-2} = 1 + \dfrac{2}{N-2}$, como queríamos. $\square$

Observação: Comparando esse último resultado com o Teorema 3.5 vemos que como pudemos usar o fato de Δ ser linear, foi possível aumentar o limite de crescimento de g de:

$s \in [1,2)$, no Teorema 3.5, para $s \in [1,\infty)$, no Teorema 4.1, quando $N = 1,2$, e de $s \in [1, \dfrac{N+2}{N})$, no Teorema 3.5, para $s \in [1, \dfrac{N}{N-2})$, no Teorema 4.1, quando $N > 2$.

(Observamos neste último caso que $\dfrac{2}{N} < \dfrac{2}{N-2}$ pois $N > N-2$).

Observação: Se na equação (4.3) trocarmos $g(u)$ por

$$g(t,u) = \begin{cases} g_1(u) & \text{se} \quad t \in I_1 = [0,\bar{t}), \\ g_2(u) & \text{se} \quad t \in I_2 = [\bar{t},T), \end{cases}$$

onde g_i é contínua e existem $a_i,\ s_i \geq 0$ tais que

$$|g_i(\sigma)| \leq a_i(|\sigma|^{s_i} + 1),$$

então, desde que $s = \max\limits_{i=1,2}\{s_i\}$ satisfaça as condições dadas no Teorema 3.5 ou 4.1, então o novo problema (4.3), associado à $g(t,u)$, admitirá uma solução. A demonstração desse fato se dá de modo inteiramente análogo ao que foi feito no Teorema 4.1.

Até o presente momento foram avaliadas situações em que se permitiam trocas periódicas tanto na parte principal da equação como nas perturbações desta equação. Entretanto existem situações onde tais trocas não ocorrem apenas de acordo com "marcas" pré-determinadas no tempo, mas também de acordo com o comportamento da própria solução. Por exemplo, um mecanismo que se desligue automaticamente, quando atinge determinada temperatura, e que volte a funcionar depois de se resfriar, constitui uma situação desse tipo.

Nosso próximo resultado avaliará um caso particular desta situação, onde a troca de operadores na equação depende da norma da solução.

5. Soluções Periódicas de Problemas Perturbados com Mudanças Abruptas não Temporais

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t(t) - \Delta_p u(t) \in F(t, u(t)) \\ u(0) = u(T), \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ e $F(t,\cdot) : L^q(\Omega) \to L^{q'}(\Omega)$ é um operador múltivoco tal que para cada $t \in (0,T)$ tem-se:

$$F(t,u) = \begin{cases} \{F_1(t,u)\} & \text{se } \ |u|_q < R, \\ \{F_2(t,u)\} & \text{se } \ |u|_q > R, \\ \{\sigma F_1(t,u) + (1-\sigma)F_2(t,u);\ \sigma \in [0,1]\} & \text{se } \ |u|_q = R. \end{cases} \tag{5.2}$$

Aqui $q, p \geq 2$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, $1 - \dfrac{N}{p} > -\dfrac{N}{q}$ e $F_j(t,\cdot) : L^q(\Omega) \to L^{q'}(\Omega)$ é um operador contínuo e limitado satisfazendo

$$|F_j(t,u)|_{q'} \leq m_j(t)|u|_q^{s_j} + h_j(t)\ , \quad \forall\, u \in L^q(\Omega), \tag{5.3}$$

onde $m_j \in L^\infty(0,T)$, $h_j \in L^{p'}(0,T)$, são funções não negativas quando $j = 1, 2$. (Por motivos técnicos que se tornarão claros proximamente tivemos que tomar a imagem de $F_j(t,\cdot)$ em $L^{q'}(\Omega)$ ao invés de em $W^{-1,p'}(\Omega)$, como foi tomado no capítulo anterior).

Com relação a este problema, mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 5.1: *Se $0 \leq s_j < p - 1$, $j = 1, 2$, então existem $u \in W = \{w \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega));\ w_t \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}\Omega)\}$ e $\xi \in L^{p'}(0,T; L^{q'}(\Omega))$ tais que u é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \xi \\ u(0) = u(T) \end{cases} \tag{5.4}$$

e

$$\xi(t) \in F(t, u(t)) \quad \textit{para quase todo} \quad t \in (0,T).$$

Para provar este resultado vamos introduzir as seguintes aproximações

$$F_\varepsilon : L^p(0,T; L^q(\Omega)) \to L^{p'}(0,T; L^{q'}(\Omega)) \tag{5.5}$$

onde $\varepsilon \in (0,R)$ e para quase todo $t \in (0,T)$ e qualquer $u \in L^p(0,T;L^q(\Omega))$ definimos F_ε por

$$F_\varepsilon(t,u(t)) = \begin{cases} F_1(t,u(t)) & , \text{ se } \ |u(t)|_q < R, \\ F_2(t,u(t)) & , \text{ se } \ |u(t)|_q > R+\varepsilon, \\ \left[1 - \dfrac{(|u(t)|_q - R)}{\varepsilon}\right] F_1(t,u(t)) + \dfrac{(|u(t)|_q - R)}{\varepsilon} F_2(t,u(t)), & \\ & , \text{ se } \ |u(t)|_q \in [R, R+\varepsilon]. \end{cases}$$

Com relação a estas aproximações, valem os seguintes resultados:

Lema 5.2: *Para cada $\varepsilon \in (0,R)$ o operador F_ε definido em (5.5) é contínuo e uniformemente limitado em ε, isto é, $\exists \ a > 0$ e $s = \max\{s_1, s_2\}$ tais que:*

$$|F_\varepsilon(u)|_{L^{p'}L^{q'}} \le a(|u|^s_{L^pL^q} + 1). \tag{5.6}$$

Prova: Mostremos primeiramente a limitação de F_ε. De (5.3) e da desigualdade de Young temos que se chamarmos

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t), \ \ h(t) = h_1(t) + h_2(t) + 1 \quad \text{e} \quad s = \max\{s_1, s_2\},$$

então para todo $u \in L^p(0,T;L^q(\Omega))$ e $j = 1,2$ teremos

$$|F_j(t,u(t))|_{q'} \le m(t)|u(t)|^s_q + h(t). \tag{5.7}$$

Assim, se $u \in L^p(0,T;L^q(\Omega))$ e se para algum $t \in (0,T)$ tem-se $|u(t)|_q < R$ (e aí tomamos $j=1$) ou se $|u(t)|_q > R+\varepsilon$ (e então tomamos $j=2$) teremos que

$$|F_\varepsilon(t,u(t))|_{q'} = |F_j(t,u(t))|_{q'} \le m(t)|u(t)|^s_q + h(t). \tag{5.8}$$

Mas, se t é tal que $|u(t)|_q \in [R, R+\varepsilon]$, então $0 \le \dfrac{|u(t)|_q - R}{\varepsilon} \le 1$. Logo de (5.7) teremos

$$|F_\varepsilon(t,u(t))|_{q'} \le \left(1 - \frac{|u(t)|_q - R}{\varepsilon}\right)(m(t)|u(t)|^s_q + h(t)) +$$
$$\left(\frac{|u(t)|_q - R}{\varepsilon}\right) \cdot (m(t)|u(t)|^s_q + h(t)) \le m(t)|u(t)|^s_q + h(t).$$

Assim, se $u \in L^p(0,T;L^q(\Omega))$, para todo $t \in (0,T)$ temos (5.8). Mas, como $0 \le s < p-1$, existe $c_1 = c_1(T)$ tal que

$$|\cdot|_{L^{p's}L^q} \le c_1 |\cdot|_{L^pL^q},$$

de modo que, integrando $|F_\varepsilon(t,u(t))|_{q'}^{p'}$ de 0 à T e usando esta última desigualdade, obtemos (5.6) com $a = c_1^s|m|_\infty + |h|_{p'}$.

Para mostrar a continuidade de F_ε, basta mostrarmos que para cada $t \in (0,T)$ o operador $F_\varepsilon(t,\cdot) : L^q(\Omega) \to L^{q'}(\Omega)$ é contínuo, pois da limitação obtida em (5.8) e do Teorema da Convergência de Lebesgue concluímos a continuidade de F_ε.

Assim seja $u \in L^q(\Omega)$ tal que $u \in B_R(0)$ ou $u \in L^q(\Omega) \setminus \overline{B_{R+\varepsilon}(0)}$. Então pela definição de $F_\varepsilon(t,\cdot)$ e pela continuidade de $F_j(t,\cdot)$, $j = 1,2$, concluímos que $F_\varepsilon(t,\cdot)$ é contínua em u.

Por outro lado, se $|u|_q \in (R, R+\varepsilon)$, então para toda seqüência $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$ teremos que $|u_n|_q \in (R, R+\varepsilon)$ para n suficientemente grande e, além disso, $|u_n|_q \to |u|_q$. Logo,

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(t,u_n) = & \left(1 - \frac{(|u_n|_q - R)}{\varepsilon}\right) F_1(t,u_n) + \left(\frac{|u_n|_q - R}{\varepsilon}\right) F_2(t,u_n) \to \\ & \left(1 - \frac{(|u|_q - R)}{\varepsilon}\right) F_1(t,u) + \left(\frac{|u|_q - R}{\varepsilon}\right) F_2(t,u) = F_\varepsilon(t,u). \end{aligned}$$

Concluímos que $F_\varepsilon(t,\cdot)$ é contínua em u se $|u|_q \in (R, R+\varepsilon)$.

Se $|u|_q = R$ e $u_n \to u$ podemos então extrair uma subseqüência que ainda denotaremos por u_n tal que para n suficientemente grande tenhamos $|u_n|_q \leq R$ ou $R < |u_n|_q < R+\varepsilon$. Mas tanto num caso quanto no outro, como anteriormente, concluímos que:

$$F_\varepsilon(t,u_n) \to F_\varepsilon(t,u) = F_1(t,u).$$

Procedemos analogamente quando $|u|_q = R+\varepsilon$ e também concluímos a continuidade de $F_\varepsilon(t,\cdot)$ para este u.

Como analisamos todas as possibilidades para u, a continuidade de F_ε é obtida. □

Prova do Teorema 5.1: Para cada $\varepsilon \in (0,R)$, seja u_ε uma solução fraca do problema aproximado:

$$\begin{cases} (u_\varepsilon)_t - \Delta_p(u_\varepsilon) = F_\varepsilon(u_\varepsilon), \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(T), \end{cases} \tag{5.9}$$

que existe pelo Teorema 3.3.

Vamos então obter estimativas uniformes para $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ que permitam extrair uma subseqüência que convirja para uma solução de (5.4) e conseqüentemente de

(5.1).

Em primeiro lugar segue de (2.12) e do fato de $L^{q'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ que existe $k > 0$ tal que

$$|u_\varepsilon|^p_{L^pW_0^{1,p}} \leq k^p |F_\varepsilon(u_\varepsilon)|^{p'}_{L^{p'}L^{q'}},$$

logo de (5.6) teremos

$$|u_\varepsilon|_{L^pW_0^{1,p}} \leq (ka)^{1/(p-1)}(|u_\varepsilon|^s_{L^pL_q} + 1)^{1/(p-1)}, \tag{5.10}$$

mas $0 \leq s < p-1$ e $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, logo pela desigualdade de Young teremos que $\exists\ K_1 > 0$ tal que

$$|u_\varepsilon|_{L^pW_0^{1,p}} \leq K_1.$$

Por outro lado, de (5.9) e (1.7), concluímos que

$$|(u_\varepsilon)_t|_{L^{p'}W^{-1,p'}} \leq k(a|u_\varepsilon|^s_{L^pL^q} + 1) + |u_\varepsilon|^{p-1}_{L^pW_0^{1,p}}.$$

Agora da limitação de $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>o}$ em $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ e do fato de $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, encontramos $K_2 > 0$ tal que

$$|(u_\varepsilon)_t|_{L^{p'}W^{-1,p'}} \leq K_2.$$

Concluímos então que $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é um conjunto limitado em W, espaço de Banach reflexivo que pelo Lema 1.1, de Aubin-Lions, está compactamente imerso em $L^p(0,T;L^q(\Omega))$. Logo é possível extrair uma subseqüência $\{u_{\varepsilon_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ e encontrar $u \in W$ tal que

$$u_{\varepsilon_i} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W \tag{5.11}$$

$$u_{\varepsilon_i} \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^p(0,T;L^q(\Omega)). \tag{5.12}$$

Então, à partir da limitação de $-\Delta_p$ dada em (1.7) e da limitação de F_ε dada em (5.6), extraímos nova subseqüência, ainda denotada por $(u_{\varepsilon_i})_{i\in\mathbb{N}}$, para concluir que existem $\eta \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ e $\xi \in L^{p'}(0,T;L^{q'}(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ tais que

$$-\Delta_p(u_{\varepsilon_i}) \rightharpoonup \eta \quad \text{em} \quad L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) \tag{5.13}$$

$$F_{\varepsilon_i}(u_{\varepsilon_i}) \rightharpoonup \xi \quad \text{em} \quad L^{p'}(0,T;L^{q'}(\Omega)). \tag{5.14}$$

Passando o limite (fraco) em (5.9) obtemos

$$u_t + \eta = \xi. \tag{5.15}$$

Para poder concluir que isto fornece a solução procurada, em primeiro lugar vamos verificar que $u(0) = u(T)$. Para isso, note que se $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty([0,T])$ então $w\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Vamos tomar em particular φ tal que $\varphi(0) = \varphi(T)$.

Em primeiro lugar, por (1.2) e pelo fato de $u_{\varepsilon_i}(T) = u_{\varepsilon_i}(0)$ e de $\varphi(T) = \varphi(0)$, teremos que

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon_i}(t), w)\varphi(t)dt = -\int_0^T (u_{\varepsilon_i}(t), w)\varphi'(t)dt,$$

de modo que ao passarmos o limite nesta igualdade concluímos, através de (5.11), que

$$\int_0^T (u'(t), w)\varphi(t)dt = -\int_0^T (u(t), w)\varphi(t)dt.$$

Mas, novamente de (1.2), temos que

$$\int_0^T (u'(t), w)\varphi(t)dt = -\int_0^T (u(t), w)\varphi(t)dt + (u(T), w)\varphi(T) - (u(0), w)\varphi(0),$$

e, conseqüentemente, $(u(T), w)\varphi(T) = (u(0), w)\varphi(0)$ para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $\varphi(0) = \varphi(T)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ concluímos que $u(0) = u(T)$ e portanto u satisfaz o problema

$$\begin{cases} u_t + \eta = \xi, \\ u(0) = u(T). \end{cases} \tag{5.16}$$

Mostremos agora que $\eta = -\Delta_p u$. Para isso vamos tomar um $v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, fixo, e

$$S_i = \int_0^T (-\Delta_p u_{\varepsilon_i}(t) + \Delta_p v(t),\ u_{\varepsilon_i}(t) - v(t))dt \geq 0,$$

lembrando que $S_i \geq 0$ devido à monotonia de $-\Delta_p$.

Analisando o termo $\int_0^T (-\Delta_p u_{\varepsilon_i}(t), u_{\varepsilon_i}(t))dt$ desta desigualdade, obtemos à partir de (5.9) e do fato de $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(T)$ que

$$\int_0^T (-\Delta_p u_{\varepsilon_i}(t), u_{\varepsilon_i}(t))dt = \int_0^T (F_{\varepsilon_i}(u_{\varepsilon_i}(t)), u_{\varepsilon_i})dt.$$

Tomando-se o limite, quando $i \to \infty$, e usando-se (5.12), (5.14) e o fato de $\int_0^T (u'(t), u(t))dt = 0$, concluímos

$$\int_0^T (-\Delta_p u_{\varepsilon_i}(t), u_{\varepsilon_i}(t))dt \to \int_0^T (\xi(t), u(t))dt =$$
$$\int_0^T (\xi(t) - u'(t), u(t))dt = \int_0^T (\eta(t), u(t))dt.$$

Passando o limite em S_i, concluímos que

$$\int_0^T (\eta(t) + \Delta_p v(t), u(t) - v(t))dt \geq 0.$$

Se trocarmos v por $u - \lambda w$, com $w \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ e $\lambda > 0$, obtemos

$$\int_0^T (\eta(t) + \Delta_p(u(t) - \lambda w(t)), w(t))dt \geq 0.$$

Assim, usando a hemicontinuidade de $-\Delta_p$ (veja (1.5)) e o Teorema da Convergência de Lebesgue, ao passar o limite quando $\lambda \to 0$ obtemos que para todo $w \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$

$$\int_0^T (\eta(t) + \Delta_p u(t), w(t))dt \geq 0.$$

Trocando w por $-w$ concluímos entãoque $\eta = -\Delta_p u$ e, portanto,

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \xi, \\ u(0) = u(T). \end{cases} \tag{5.17}$$

Assim falta apenas mostrar que $\xi(t) \in F(t, u(t))$ q.t.p. em $(0, T)$.

Para isso façamos algumas considerações com relação à u_{ε_i}. De (5.12) temos que existe uma subseqüência que ainda denotaremos por $(u_{\varepsilon_i})_{i \in N}$ tal que para quase todo $t \in [0, T]$ vale

$$u_{\varepsilon_i}(t) \to u(t) \quad \text{em} \quad L^q(\Omega) \quad \text{e} \quad |u_{\varepsilon_i}(t)|_q \to |u(t)|_q. \tag{5.18}$$

Além disso, para qualquer subconjunto mensurável $I \subset (0, T)$ concluímos que

$$u_{\varepsilon_i} \to u \quad \text{em} \quad L^p(I, L^q(\Omega)) \tag{5.19}$$

Sejam agora os seguintes subconjuntos mensuráveis de $[0, T]$:

$$I = \{t \in [0,T]; |u(t)|_q < R\},$$
$$J = \{t \in [0,T]; |u(t)|_q > R\},$$
$$K = \{t \in [0,T]; |u(t)|_q = R\}.$$

Suponhamos que $t \in I$. Da definição de F_{ε_i}, dada em (5.5), temos que $F_{\varepsilon_i}(t, u(t)) = F_1(t, u(t))$. Por outro lado como são válidos (5.19) e conseqüentemente (5.18) em I, temos que para valores suficientemente grandes de i

$$|u_{\varepsilon_i}(t)|_q < R$$

e, conseqüentemente, $F_{\varepsilon_i}(t, u_{\varepsilon_i}(t)) = F_1(t, u_{\varepsilon_i}(t))$. Portanto se $t \in I$, temos que

$$F_{\varepsilon_i}(t, u_{\varepsilon_i}(t)) \to F_1(t, u(t)).$$

Segue da limitação de $F_{\varepsilon_i}(t; \ )$, dada em (5.8), e do Teorema da Convergência de Lebesgue que

$$F_{\varepsilon_i}(u_{\varepsilon_i}) \to F_1(\cdot, u) \quad \text{em} \quad L^{p'}(I; L^{q'}(\Omega)).$$

Mas sabemos que $F_{\varepsilon_i} u_{\varepsilon_i} \rightharpoonup \xi$ em $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ e, portanto, concluímos que $\xi|_I = F_1(\cdot, u)$ q.t.p. em I e $\xi|_I \in L^{p'}(I; L^{q'}(\Omega))$.

De modo inteiramente análogo podemos concluir que

$$F_{\varepsilon_i}(u_{\varepsilon_i}) \to F_2(\cdot, u) \quad \text{em} \quad L^{p'}(J; L^{q'}(\Omega))$$

e que $\xi|_J = F_2(\cdot, u)$ e $\xi|_J \in L^{p'}(J; L^{q'}(\Omega))$.

Suponhamos agora que $t \in K$. Se necessário for, podemos tomar uma nova subseqüência, que ainda denotaremos por $(u_{\varepsilon_i})_{i \in N}$, de modo que sejam simultaneamente verdadeiros os seguintes fatos

$$u_{\varepsilon_i} \to u \quad \text{em} \quad L^p(K; L^q(\Omega)),$$
$$u_{\varepsilon_i}(t) \to u(t) \quad \text{em} \quad L^q(\Omega) \quad \text{q.t.p. em} \quad K,$$
$$F_{\varepsilon_i}(u_{\varepsilon_i}) \rightharpoonup \xi \quad \text{em} \quad L^{p'}(K; L^{q'}(\Omega)),$$
$$F_j(\cdot, u_{\varepsilon_i}) \to F_j(\cdot, u) \quad \text{em} \quad L^{p'}(K; L^{q'}(\Omega)) \quad \text{para} \quad j = 1, 2,$$
$$F_j(t, u_{\varepsilon_i}(t)) \to F_j(t, u(t)) \quad \text{em} \quad L^{q'}(\Omega) \quad \text{para} \quad j = 1, 2.$$

Como $F_{\varepsilon_i}(u_{\varepsilon_i})$ converge fracamente para η, existe uma seqüência de combinações convexas de $F_{\varepsilon_i}(u_{\varepsilon_i})$, isto é, uma seqüência de elementos do tipo:

$$\sum_{k=1}^{k_i} a_k^{(i)} F_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \quad \text{onde} \quad \sum_{k=1}^{k_i} a_k^{(i)} = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq a_k^{(i)} \leq 1$$

que converge fortemente para η em $L^{p'}(K; L^q(\Omega))$ quando $i \to \infty$. A partir desses fatos, vamos construir uma seqüência "especial".

Tomemos $m = 1$. Então existe $N(1) > 0$ tal que se $i \geq N(1)$ então para quase todo t em K temos

$$|F_j(t, u_{\varepsilon_i}(t)) - F_j(t, u(t))|_{q'} < 1, \quad \text{onde} \quad j = 1, 2.$$

Em particular, existem $k(1) \geq N(1)$ e $v_1(t) \in L^q(\Omega)$ tais que

$$v_1(t) = \sum_{k=N(1)}^{k(1)} a_k^{(1)} F_{\varepsilon_k}(t, u_{\varepsilon_k}(t))$$

onde

$$a_k^{(1)} \in [0,1], \sum_{k=N(1)}^{k(1)} a_k^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad |v_1(t) - \xi(t)|_{q'} < 1.$$

Tomando $m = 2$, vamos encontrar $N(2) > k(1)$ tal que se $i \geq N(2)$ então para quase todo t em K teremos

$$|F_j(t, u_{\varepsilon_i}(t) - F_j(t, u(t))|_{q'} < \frac{1}{2} \quad \text{onde} \quad j = 1, 2.$$

Em particular, existem $k(2) \geq N(2)$ e $v_2(t) \in L^q(\Omega)$ tais que

$$v_2(t) = \sum_{k=N(2)}^{k(2)} a_k^{(2)} F_{\varepsilon_k}(t, u_{\varepsilon_k}(t))$$

onde $a_k^{(2)} \in [0,1]$, $\sum_{k=N(2)}^{k(2)} a_k^{(2)} = 1$ e $|v_2(t) - \xi(t)|_{q'} < 1/2$.

Assim procedendo, tomando-se $m \in \mathbb{N}$ vamos encontrar $N(m) > k(m-1)$ tal que se $i \geq N(m)$ e $j = 1, 2$ então

$$|F_j(t, u_{\varepsilon_i}(t)) - F_j(t, u(t)|_{q'} < \frac{1}{m}, \quad \text{q.t.p. em} \quad K \tag{5.20}$$

e em particular vão existir $k(m) \geq N(m)$ e $v_m(t) \in L^q(\Omega)$ tais que

$$v_m(t) = \sum_{k=N(m)}^{k(m)} a_k^{(m)} F_{\varepsilon_k}(t, u_{\varepsilon_k}(t))$$

onde $a_k^{(m)} \in [0,1]$, $\sum_{k=N(m)}^{k(m)} a_k^{(m)} = 1$ e

$$|v_m(t) - \xi(t)|_{q'} < \frac{1}{m}. \tag{5.21}$$

Mas, segue da definição de F_ε que

$$v_m(t) = \sum_{k=N(m)}^{k(m)} a_k^{(m)} \alpha_k(t) F_1(t, u_{\varepsilon_k}(t)) + a_k^{(m)}(1 - \alpha_k(t)) F_2(t, u_{\varepsilon_k}(t)),$$

onde $0 \leq \alpha_k(t) \leq 1$ (e $\alpha_k(t) = 0$ se $|u_{\varepsilon_k}(t)| \geq R + \varepsilon$ e $\alpha_k(t) = 1$ se $|u_{\varepsilon - k}(t)|_q \leq R$). Então v_m também é uma combinação convexa de $F_1(t, u_{\varepsilon_k}(t))$ e de $F_2(t, u_{\varepsilon_k}(t))$ com $k \in \{N(m), \ldots, k(m)\}$.

Definindo agora

$$w_m(t) = \sum_{k=N(m)}^{k(m)} a_k^{(m)} \alpha_k(t) F_1(t, u(t)) + a_k^{(m)}(1 - \alpha_k(t)) F_2(t, u(t))$$

podemos ver facilmente à partir de (5.20) que

$$|w_m(t) - v_m(t)|_{q'} \leq \frac{2}{m} \sum_{k=N(m)}^{k(m)} a_k^{(m)} = \frac{2}{m}.$$

Portanto, de (5.21) podemos concluir que

$$w_m(t) \to \xi(t) \quad \text{em} \quad L^{q'}(\Omega), \quad \text{q.t.p. em} \quad K.$$

Mas $w_m(t) \in \sum_t = \{\sigma F_1(t, u(t)) + (1-\sigma) F_2(t, u(t)) \in L^{q'}(\Omega); \sigma \in [0,1]\}$ (q.t.p. em K), e $\sum_t$ é um conjunto convexo e fechado de $L^{q'}(\Omega)$. Logo, para quase todo $t \in K$, existe $\sigma(t) \in [0,1]$ tal que

$$\xi(t) = \sigma(t) F_1(t, u(t)) + (1 - \sigma(t)) F_2(t, u(t)).$$

Portanto, temos que $\xi(t) \in F(t, u(t))$ para quase todo $t \in [0, T]$ e podemos escrever

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = \xi \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

como queríamos. $\square$

Observação 5.2: Se $k = k(\theta)$ e $r = r(\theta, q)$ forem dados por (3.14), onde θ é dado por (3.20), e se $F_j(t, \cdot) : L^r(\Omega) \to L^{q'}(\Omega)$ for contínua, limitada e satisfizer

$$|F_j(t,u)|_{q'} \leq m_j(t)|u|_r^{s_j} + h_j(t),$$

para quase todo $t \in [0, T]$, onde m_j e h_j são funções não negativas tais que $m_j \in L^\infty(0,T)$, $h_j \in L^{p'}(0, T)$ e

$$1 \leq s_j < \begin{cases} p+1 & \text{se} \quad N \leq p, \\ p+1-\dfrac{2p}{N} & \text{se} \quad N > p, \end{cases}$$

então se $|m_j|_\infty$ for suficientemente pequeno, $j = 1, 2$, o Teorema 5.1, associado a estas novas condições ainda será válido, isto é, o problema:

$$\begin{cases} u_t(t) - \Delta_p u(t) \in F(t, u) \\ u(0) = u(T), \end{cases} \tag{5.22}$$

onde

$$F(t,u) = \begin{cases} F_1(t,u) & \text{se} \quad |u|_r < R, \\ F_2(t,u) & \text{se} \quad |u|_r > R, \\ \{\sigma F_1(t,u) + (1-\sigma)F_2(t,u);\ \sigma \in [0,1]\} & \text{se} \quad |u|_r = R. \end{cases}$$

terá uma solução.

Para ver isto, notamos que, na demonstração do Teorema 5.1, uma vez que o problema (5.9) possuia uma solução u_ε, foi necessário apenas concluir que o conjunto $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ era limitado em W (uniformemente em ε), para concluir que existiam u e ξ satisfazendo (5.4).

Assim, se definirmos F_ε, como anteriormente, não é difícil ver que para todo $t \in (0, T)$

$$F_\varepsilon(t, \cdot) : L^r(\Omega) \to L^{q'}(\Omega)$$

é contínuo, limitado e

$$|F_\varepsilon(t,u)|_{q'} \leq m(t)|u|_r^s + h(t),$$

(onde m, h e s são como no Teorema 5.1) e que, pelo fato de $s \leq \frac{k}{p'}$, F_ε é contínuo e limitado como operador de $L^k(0,T;L^r(\Omega))$ em $L^{p'}(0,T;L^{q'}(\Omega))$ e

$$|F_\varepsilon(u)|_{L^{p'}L^{q'}} \leq c|m|_\infty |u|^s_{L^kL^r} + |h|_{L^{p'}L^{q'}},$$

onde $c = c(T) > 0$ é tal que

$$|u|_{L^{p's}L^r} \leq c|u|_{L^kL^r}.$$

Como no Teorema 3.5 encontramos $R > 0$ tal que $S \circ F_\varepsilon(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$ onde $S \circ F_\varepsilon$ é completamente contínuo. (S é o operador solução definido em (3.15)). Como a limitação de F_ε não depende de ε, R também não dependerá de ε. Logo o conjunto $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ será uniformemente limitado em $L^k(0,T;L^r(\Omega))$ e conseqüentemente $\{F_\varepsilon u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ será uniformemente limitado em $L^{p'}(0,T;L^{q'}(\Omega))$.

Assim como no Teorema (5.1) podemos concluir que $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é também limitado em W e em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Deste modo vão existir uma subseqüência $(u_{\varepsilon_i})_{i\in\mathbb{N}}$ e um elemento $u \in W \subset L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ tais que:

$$\begin{array}{lll} u_{\varepsilon_i} \rightharpoonup u & \text{em} & W \\ u_{\varepsilon_i} \to u & \text{em} & L^p(0,T;L^q(\Omega)) \end{array}$$

e conseqüentemente

$$u_{\varepsilon_i} \to u \quad \text{em} \quad L^k(0,T;L^r(\Omega))$$

com estes dados, seguindo a demonstração do Teorema 5.1, obtemos a existência de solução para o problema (5.22).

De modo absolutamente análogo, ao Teorema 5.1, podemos mostrar que:

Teorema 5.3: *Sejam V e X espaços de Banach reflexivos, V separável, e V' e X' seus respectivos duais topológicos e H um espaço de Hilbert. Suponhamos que $V \subset X \subset H \subset X' \subset V'$ continuamente e que $V \subset X$ compactamente.*

Seja $A : V \to V'$ um operador satisfazendo as condições impostas sobre A_i no Teorema 3.3 e seja $F(t,\cdot) : X \to X'$, $t \in (0,T)$, um operador multívoco definido por:

$$F(t,u) = \begin{cases} \{F_1(t,u)\} & , \text{ se } |u|_X < R, \\ \{F_2(t,u)\} & , \text{ se } |u|_X > R, \\ \{\sigma F_1(t,u) + (1-\sigma)F_2(t,u);\ \sigma \in [0,1]\} & , \text{ se } |u|_X = R, \end{cases}$$

onde $F_j(t,\cdot) : X \to X'$, $j = 1, 2$, *são operadores contínuos e limitados tais que para determinadas funções positivas* $m_j \in L^\infty(0,T)$ *e* $h_j \in L^{p'}(0,T)$ *para* $0 \leq s_j < p - 1$ *e para todo* $u \in X$ *satisfazem* $|F_j(t,u)|_{X'} \leq m_j(t)|u|_X^{s_j} + h_j(t)$. *Então existem* $u \in W = \{w \in L^p(0,T;V); w_t \in L^{p'}(0,T;V'\}$ *e* $\xi \in L^{p'}(0,T;X')$ *tais que*

$$\begin{cases} u_t + Au = \xi, \\ u(0) = u(T), \end{cases}$$

e para quase todo $t \in (0,T)$

$$\xi(t) \in F(t, u(t)),$$

(*onde* A *está sendo naturalmente visto como operador definido sobre* $L^p(0,T;V)$ *com imagem em* $L^{p'}(0,T;V')$).

Observação: Para taxas de crescimentos s_j iguais ou superiores à $p - 1$, podemos trocar $-\Delta_p$ com condição de Dirichlet por qualquer dos operadores fornecidos pela Observação 3.4, que as conclusões da Observação 5.2 ainda se mantém.

Até o presente momento, todos os problemas que analisamos envolviam perturbações que dependiam da solução do problema mas não de suas derivadas. No próximo capítulo, mostraremos a existência de soluções periódicas, para algumas equações, cujas perturbações envolvam também o gradiente da solução.

Capítulo 3

Perturbações Envolvendo o Gradiente da Solução

No capítulo anterior, para que pudéssemos encontrar soluções de problemas do tipo (0.1), foi fundamental explorarmos o fato do operador $S \circ N_H$ ser completamente contínuo. Quando buscamos soluções do problema abaixo

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u(t,x) = h(t,x) + \sum_{i=1}^{N} a_i(t) \dfrac{\partial v}{\partial x_i}(t,x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(0,x) = u(T,x), \end{cases}$$

onde $h \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, $a_i \in L^\infty(0,T)$ e $v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, entretanto podemos ver através do Corolário 2.2 do Capítulo 2, que o operador solução associado

$$\begin{array}{rccc} S \circ N_H : & L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) & \to & L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \\ & v & \mapsto & u \end{array}$$

é um operador contínuo, limitado mas *não* é completamente contínuo. Por causa disso, para se obter soluções de equações cujas perturbações envolvam também o gradiente da solução, somos obrigados a buscar novas técnicas que contornem este tipo de problema. Isto será feito através do método de Faedo-Galerkin. Começamos enunciando o seguinte resultado:

Teorema 1.1: *Seja $p \geq 3$, $h \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ e g_ℓ uma função real e localmente lipschitziana satisfazendo*

$$|g_\ell(\tau) - g_\ell(\sigma)| \leq C_\ell(|\tau|^{s_\ell - 1} + |\sigma|^{s_\ell - 1} + 1)|\tau - \sigma|,$$

onde $C_\ell \geq 0$, $1 \leq s_\ell < p-2$ e $\ell = 1, \ldots, N$. Então o problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta_p(u(t,x)) = h(t,x) + \sum_{\ell=1}^{N} g_\ell(u(t,x)) \dfrac{\partial u}{\partial x_\ell}(t,x), & t \in (0,T), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & t \in (0,T), \\ u(0,x) = u(T,x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

tem uma solução fraca. Se $s_\ell = p-2$ e C_ℓ for suficientemente pequeno, para cada $\ell = 1, \ldots, N$, então (1.1) também terá uma solução fraca. Além disso, se

$h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *e se* $1 \leq s_\ell \leq \dfrac{p-2}{2}$ *então a solução correspondente será forte.*

Lembramos que o método de Galerkin (veja Lions [10], Capítulo 2, Seção 1 e [3], Capítulo 3, §3) consiste em formular uma seqüência de problemas (P^m), definidos em espaços de dimensão finita, à partir da formulação variacional do problema original (P), e então obter estimativas uniformes para as soluções u_m de (P^m) que permitam que u_m convirja para uma solução u de (P).

Assim dado o problema (1.1) seja (P) sua formulação variacional:

$$(P) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega u'(t,x)v(x)dx + \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^{p-2} < \nabla u(t,x), \nabla v(x) > dx = & \\ \displaystyle = \int_\Omega \sum_{k=1}^N h_k(t,x)\frac{\partial v}{\partial x_k}(x)dx + \int_\Omega g(u(t,x))\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)v(x)dx, & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u(T,x), & x \in \Omega \end{cases}$$

onde $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $h_k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$ e $(h_1(t),\ h_2(t),\dots,h_N(t))$ é a representação usual de $h(t)$ em $W^{-1,p'}(\Omega)$ e finalmente

$$g(u)\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{\ell=1}^N g_\ell(u)\frac{\partial u}{\partial x_\ell}.$$

Como $p \geq 3 > 1$, o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo *separável* e portanto possui uma "base" enumerável $\{e_1, e_2, \dots\}$. Definimos então o espaço

$$X^m = [e_1, e_2, \dots, e_m],$$

gerado pelos primeiros m elementos da base e o problema de valor inicial (P^m):

$$(P^m) \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega u_m'(t,x)e_i(x)dx + \int_\Omega |\nabla u_m(t,x)|^{p-2} < \nabla u_m(t,x), \nabla e_i(x) > dx = \\ \displaystyle = \int_\Omega g(u_m(t,x))\frac{\partial u_m}{\partial x}(t,x)e_i(x)dx + \int_\Omega \sum_{k=1}^N h_k(t,x)\frac{\partial e_i}{\partial x_k}dx, \\ u_m(0) = u_{m0} \in X^m, \qquad i = 1,\dots,m, \end{cases}$$

onde $u_m(t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)e_k$, $\ u_{m0} = \sum_{k=1}^m a_k e_k$ e $a_k \in \mathbb{R}$.

Reescrevendo (P^m) obtemos:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m}\Big[a_j'(t)\int_\Omega e_j(x)e_i(x)dx + a_j(t)\int_\Omega |\sum_{k=1}^{m} a_k(t)\nabla e_k(x)|^{p-2} < \nabla e_j(x), \nabla e_i(x) > dx\Big] \\ = \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\int_\Omega g\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k(t)e_k(x)\Big)\frac{\partial e_j}{\partial x}(x)e_i(x)dx + \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} h_k(t,x)\frac{\partial e_i}{\partial x_k}(x)dx \\ a_i(0) = a_i \in I\!R, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Se denotarmos $U = (a_1, \dots, a_m)$, veremos que (P^m) pode ser visto como um sistema não linear do tipo

$$\begin{cases} U' = G(t,U)\ , \quad t \in (0,T) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

onde G é localmente lipschitziana em U e p'-integrável em t. De fato,

$$G(t,U) = H(t) + F(U)$$

onde $H(t) = (H_1(t), \dots, H_m(t))$ e

$$H_i(t) = \sum_{k=1}^{N}\int_\Omega h_k(t,x)\frac{\partial e_i}{\partial x_k}(x)dx\ , \quad i = 1, \dots, m,$$

e $F(U) = (F_1(U), \dots, F_m(U))$ onde

$$F_i(U) = F_i(a_1, \dots, a_m) = -\sum_{j=1}^{m} a_j \int_\Omega |\sum_{k=1}^{m} a_k \nabla e_k(x)|^{p-2} < \nabla e_j(x), \nabla e_i(x) > dx$$

$$+\sum_{j=1}^{m} a_j \int_\Omega g(\sum_{k=1}^{m} a_k e_k(x))\frac{\partial e_j}{\partial x}(x)e_i(x)dx\ , \quad i = 1, \dots, m.$$

Lembrando que $h_k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$ e que $e_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$, concluímos que $H_i \in L^{p'}(0,T)$. Por outro lado, pelas hipóteses impostas sobre g_ℓ, se tomarmos

$$s = \max_{\ell=1,\dots,N}\{s_\ell\} \quad \text{e} \quad C = 2\max_{\ell=1,\dots,m}\{C_\ell\}$$

então para todo $\tau, \sigma \in I\!R$ e $\ell = 1, \dots, N$ teremos

$$|g_\ell(\tau) - g_\ell(\sigma)| \le C(|\tau|^{s-1} + |\sigma|^{s-1} + 1)|\tau - \sigma|. \tag{1.2}$$

Logo se $U = (a_1, \ldots, a_m)$ e $\tilde{U} = (b_1, \ldots, b_m)$ então

$$\begin{aligned}
&\Big|g_\ell\Big(\sum_{k=1}^m a_k e_k(x)\Big) - g_\ell\Big(\sum_{k=1}^m b_k e_k(x)\Big)\Big| \leq \\
&\leq C\Big(\Big|\sum_{k=1}^m a_k e_k(x)\Big|^{s-1} + \Big|\sum_{k=1}^m b_k e_k(x)|^{s-1} + 1\Big)\Big|\sum_{k=1}^m (a_k - b_k) e_k(x)\Big|.
\end{aligned}$$

Então se U e $\tilde{U} \in \overline{B_R(0)} \subset I\!R^m$ e lembrando que $e_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e que $1 \leq s \leq p-2$ concluímos que $\exists\ K_1(R) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^m a_j \int_\Omega g_\ell\Big(\sum_{k=1}^m a_k e_k(x)\Big)\frac{\partial e_j}{\partial x_\ell}(x) e_i(x)dx - \sum_{j=1}^m b_j \int_\Omega g_\ell\Big(\sum_{k=1}^m b_k e_k(x)\Big)\frac{\partial e_j}{\partial x_\ell}(x) e_i(x)dx\Big| \leq \\
&\leq \Big|\sum_{j=1}^m a_j \int_\Omega g_\ell\Big(\sum_{k=1}^m a_k e_k(x)\Big)\frac{\partial e_j}{\partial x_\ell}(x) e_i(x) - g_\ell\Big(\sum_{j=1}^m b_k e_k(x)\Big)\frac{\partial e_j}{\partial x_\ell}(x) e_i(x) e_i dx\Big| + \\
&\quad + \Big|\sum_{j=1}^m (a_j - b_j) \int_\Omega g_\ell\Big(\sum_{k=1}^m b_k e_k(x)\Big)\frac{\partial e_j}{\partial x_\ell}(x) e_i(x)dx\Big| = A + B.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &\leq mR \int_\Omega \Big[2(2^{m-1}R)^{s-1}\sum_{k=1}^m |e_k(x)|^{s-1} + 1\Big]\Big(\sum_{k=1}^m \Big|a_k - b_k\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \Big(\sum_{k=1}^m |e_k(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial e_j}{\partial x_\ell}(x) e_i(x)\Big| dx \\
&\leq K_1(R)|U - \tilde{U}|,
\end{aligned}$$

para todo $\ell = 1, \ldots, N$.

Por outro lado das hipóteses sobre g_ℓ e da desigualdade de Young concluímos que existe $D_i > 0, i = 1, 2$, tais que para todo $\ell = 1, \ldots, N$ tenhamos

$$|g_\ell(\tau)| \leq CD_1|\tau|^s + D_2.$$

Logo

$$\begin{aligned}
B &\leq \sum_{j=1}^m |a_j - b_j| \int_\Omega \Big(CD_1\Big|\sum_{k=1}^m b_k e_k(x)\Big|^s + D_2\Big)\Big|\frac{\partial e_j}{\partial x}(x)\Big||e_i(x)|dx \\
&\leq R_2(R)|U - \tilde{U}|.
\end{aligned}$$

De modo análogo encontramos $K_3(R) > 0$ tal que

$$\left|\sum_{j=1}^{m} a_j \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^{m} a_k \nabla e_k(x)\right|^{p-2} < \nabla e_j(x), \nabla e_i(x) > dx - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{m} b_j \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^{m} b_k \nabla e_k(x)\right|^{p-2} < \nabla e_j(x), \nabla e_i(x) > dx \right| \leq$$
$$\leq K_3(R)|U - \tilde{U}|.$$

Dessa forma, concluímos que F é localmente lipschitziana. Então de acordo com o Teorema de Caratheodory (veja Hale [6], Capítulo 1, Seção 1.5, Teorema 5.1 à 5.3) encontraremos uma única $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,m}(t)e_i$, ($a_{i,m}$ absolutamente contínua em seu domínio de definição), tal que u_m é uma solução local de (P^m), definida em um intervalo maximal $[0, \tau_m)$.

Mostremos então que $\exists\ R > 0$ tal que se $|u_m|_2 \leq R$ então $|u_m|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2}R$, para todo $m \in \mathbb{N}$, e que portanto u_m está definida em $[0, T]$.

Notemos, em primeiro lugar que

$$p' = \frac{p}{p-1} \leq \frac{p}{p-2} \leq \frac{ps}{p-2} \leq p. \tag{1.3}$$

Avisamos ao leitor que de agora em diante, se X e Y forem dois espaços de Banach quaisquer, tais que $X \subset Y$ continuamente, indicaremos por $k > 0$ a constante tal que

$$|\cdot|_Y \leq k|\cdot|_X. \tag{1.4}$$

Assim, seja g_ℓ satisfazendo (1.2), onde $\ell = 1 \ldots N$. Se

$$N_{g_\ell} : L^{ps/(p-2)}(\Omega) \to L^{p/(p-2)}(\Omega)$$

é operador de Nemytskii associado a g_ℓ, então como $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{ps/(p-2)}(\Omega)$ segue que

$$\begin{aligned} &|N_{g_\ell}(u) - N_{g_\ell}(v)|_{p/(p-2)} \leq \\ &C(|u|_{ps/(p-2)}^{s-1} + |v|_{ps/(p-2)}^{s-1} + |\Omega|^{ps/(p-2)(s-1)})|u - v|_{ps/(p-2)} \leq \\ &Ck^s(|u|_{1,p}^{s-1} + |v|_{1,p}^{s-1} + k^{-s+1}|\Omega|^{ps/(p-2)(s-1)})|u - v|_{1,p}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Fazendo $v = 0$ e usando a Desigualdade de Young, encontramos $c_1 = C(1 + |\Omega|^{sp/(p-2)(s-1)})$ e $c_2 = C|\Omega|^{ps/(p-2)(s-1)}$ tais que

$$|N_{g_\ell}(u)|_{p/(p-2)} \leq c_1|u|^s_{ps/(p-2)} + c_2 \leq c_1 k^s |u|_{1,p} + c_2. \tag{1.6}$$

Agora estamos prontos para obter estimativas uniformes para u_m. Para isso, vamos trocar e_i por $u_m(t)$ em (P^m) para então concluir que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|_2^2 + |u_m(t)|_{1,p}^p \leq |h(t)|_{-1,p'}|u_m(t)|_{1,p} + \\
&+|N_g(u_m(t)\frac{\partial u_m}{\partial x}(t)|_{-1,p'}|u_m(t)|_{1,p}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

onde $N_g(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} N_{g_\ell}(u)\frac{\partial u}{\partial x_\ell}$.

De (1.3) e (1.6) temos que

$$\begin{aligned}
&|N_{g_\ell}(u_m(t))\frac{\partial u_m}{\partial x_\ell}(t)|_{-1,p'} \leq k|N_{g_\ell}(u_m(t))\frac{\partial u_m}{\partial x_\ell}(t)|_{p'} \leq \\
&k|N_{g_\ell}(u_m(t))|_{p/(p-2)}|u_m(t)|_{1,p} \leq \\
&c_1 k^{(s+1)}|u_m(t)|_{1,p}^{s+1} + c_2 k|u_m(t)|_{1,p}.
\end{aligned}$$

Então substituindo esta última desigualdade em (1.7) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|_2^2 + |u_m(t)|_{1,p}^p \leq \Big[|h(t)|_{-1,p'} + c_1 k^{s+1}|u_m(t)|_{1,p}^{s+1} + c_2 k|u_m(t)|_{1,p}\Big]|u_m(t)|_{1,p}.$$

Logo se usarmos a desigualdade de Young no lado direito desta desigualdade, tomarmos $\varepsilon > 0$ e lembrarmos que $1 \leq s < p-2$ nós encontraremos constantes

$$\begin{aligned}
&c_3 = 1 - (\varepsilon^p + c_1 k^{s+1}\varepsilon^{p/(p-2)} + c_2 k\varepsilon^{p/2}), \\
&c_4 = c_1 k^{s+1}\varepsilon^{p/(2+s-p)} + c_2 k\varepsilon^{(2-p)/p} \quad \text{e} \\
&c_5 = \varepsilon^{-p'}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

tais que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|_2^2 + c_3|u_m(t)|_{1,p}^p \leq c_5|h(t)|_{1,p'}^{p'} + c_4, \tag{1.9}$$

e se $s = p-2$, estas constantes serão dadas por

$$c_3 = 1 - (\varepsilon^p + c_1 k^{s+1} + c_2 k\varepsilon^{p/2}),\ c_4 = c_2 k\varepsilon^{(2-p)/p} \quad \text{e} \quad c_5 = \varepsilon^{-p'}. \tag{1.10}$$

Suponhamos em primeiro lugar que $1 \leq s < p-2$. Se tomarmos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, teremos que $c_3 > 0$. Então usando o fato de que $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e a Desigualdade de Young encontramos c_6 e c_7 positivas tais que

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|_2^2 + c_6|u_m(t)|_2^2 \leq c_7(|h(t)|_{-1,p'}^{p'} + 1).$$

Multiplicando esta equação por $e^{c_6 t}$ e integrando-a de 0 à t, podemos concluir que

$$\begin{aligned} |u_m(t)|_2^2 &\leq e^{-c_6 t}|u_m(0)|_2^2 + c_7(|h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{p'} + T) \\ &\leq |u_m(0)|_2 + c_7(|h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{p'} + T)\ , \quad \forall\, t \in [0,\tau_m). \end{aligned}$$

Então $|u_m|_2$ é limitado em $[0,\tau_m)$ e, conseqüentemente u_m está definida em $[0,T]$. Mais ainda se escolhermos

$$R^2 \leq \frac{c_7}{1-e^{-c_6 T}}(T + |h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{p'}) \tag{1.11}$$

e se $|u_{m0}|_2 \leq R$ concluiremos que

$$|u_m(T)|_2 \leq R \quad \text{e que} \quad |u_m|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2}R. \tag{1.12}$$

Assim, se $K_m : X^m \to X^m$ é a aplicação de Poincaré associada à (P^m) e é tal que $K_m(u_{m0}) = u_m(T)$ então $K_m(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$. Mostremos agora que K_m é contínua.

Para isso, tomemos u_m e v_m soluções de (P^m). Usando a monotonia de $-\Delta_p$, concluímos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)-v_m(t)|_2^2 + \alpha|u_m(t)-v_m(t)|_{1,p}^p \leq \\ &\leq \left|N_g(u_m(t))\frac{\partial u_m}{\partial x}(t) - N_g(v_m(t))\frac{\partial v_m}{\partial x}(t)\right|_{-1,p'} |u_m(t)-v_m(t)|_{1,p}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Mas, vale que

$$\begin{aligned} &\left|N_g(u_m(t))\frac{\partial u_m}{\partial x}(t) - N_g(v_m(t))\frac{\partial v_m}{\partial x}(t)\right|_{-1,p'} \leq \\ &\left|\Big(N_g(u_m(t)) - N_g(v_m(t))\Big)\frac{\partial u_m}{\partial x}(t)\right|_{-1,p'} \left|\Big(\frac{\partial u_m}{\partial x}(t) - \frac{\partial v_m}{\partial x}(t)\Big)N_g(v_m(t))\right|_{-1,p'}. \end{aligned}$$

Devemos agora analisar cada termo deste produto.

Em primeiro lugar, temos de (1.3) e (1.5) que

$$\left|\left[N_{g_\ell}(u_m(t)) - N_{g_\ell}(v_m(t))\right]\frac{\partial u_m}{\partial x}(t)\right|_{-1,p'} \le k\left|N_{g_\ell}(u_m(t)) - N_{g_\ell}(v_m(t))\right|_{p-2}\left|u_m(t)\right|_{1,p}$$
$$\le k^s C(\left|u_m(t)\right|_{1,p}^{s-1} + \left|v_m(t)\right|_{1,p}^{s-1} + k^{-s}|\Omega|^{ps/(p-2)(s-1)})\left|u_m(t) - v_m(t)\right|_{1,p}\left|u_m(t)\right|_{1,p}.$$

Por outro lado, usando (1.3) e (1.6), temos que

$$\left|\left(\frac{\partial u_m}{\partial x}(t) - \frac{\partial v_m}{\partial x}(t)\right)g(v_m(t))\right|_{-1,p'} \le |u_m(t) - v_m(t)|_{1,p}\left(c_1 k^s \left|v_m\right|_{1,p}^{s} + c_2\right).$$

Então, voltando à (1.13) e lembrando que X^m tem dimensão finita (e portanto todas as normas deste espaço são equivalentes), encontramos para cada $m \in \mathbb{N}$ constantes positivas D_1 e D_2 tais que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t) - v_m(t)|_2^2 + D_1|u_m(t) - v_m(t)|_2^p \le \\ &\le D_2|u_m(t) - v_m(t)|_2^2\,[1 + |u_m(t)|_2^s + |v_m(t)|_2^s].\end{aligned}$$

Mas lembremos que se $|u_{m0}|_2, |v_{m0}|_2 \le R$, onde R satisfaz (1.11), então $|u_m|_{L^\infty L^2}, |v_m|_{L^\infty L^2} \le \sqrt{2}\cdot R$. Logo existe $k(R) > 0$ tal que se $|u_{m0}|, |v_{m0}| \le R$ então

$$\frac{d}{dt}|u_m(t) - v_m(t)|_2^2 \le k(R)|u_m(t) - v_m(t)|_2^2$$

e portanto $|u_m(t) - v_m(t)|_2^2 \le |u_{m0} - v_{m0}|_2^2 e^{k(R)t}$, para todo $t \in [0, T]$.

Logo $K_m : \overline{B_R(0)} \subset X_m \to \overline{B_R(0)} \subset X^m$ é contínua e portanto, do Teorema do Ponto Fixo de Browder segue que K_m tem um ponto fixo, isto é, existe $u_{m0} \in X^m$ tal que $u_m(T) = u_{m0} = u_m(0)$. Logo do fato de (P^m) admitir solução única concluímos que u_m é T-periódica se h for T-periódica.

Assim seja $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de soluções periódicas de (P^m). Vamos mostrar que esta seqüência é limitada em W.

Integrando (1.9) em $(0, T)$ e usando o fato de que $u_m(0) = u_m(T)$ concluímos que

$$|u_m|_{L^p W_0^{1,p}}^p \le c_3^{-1}(c_5|h|_{L^{p'}W^{-1,p'}}^{p'} + c_4 T).$$

Observando-se que $u'_m(t) \in X^m \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ e que X^m tem dimensão finita vemos que é possível calcular $|u'_m(t)|_{-1,p'}$ à partir de (P^m) onde encontramos

$$|u'_m(t)|_{-1,p'} \leq |\Delta_p u_m(t)|_{-1,p'} + |h(t)|_{-1,p'} + |N_g(u_m(t))\frac{\partial}{\partial x}u_m(t)|_{1,p}.$$

Então usando a limitação de $-\Delta_p$ e (1.6) nós concluímos que

$$|u'_m(t)|_{-1,p'} \leq |u_m(t)|_{1,p}^{p-1} + |h(t)|_{-1,p'} + c_1 k^s |u_m(t)|_{1,p}^{s+1} + c_2|u_m(t)|_{1,p}.$$

Mas se $p \leq s+2$ e se $(u_m)_{m\in N}$ é limitada em $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ concluímos facilmente que (u'_m) é limitada em $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$.

Portanto, $(u_m)_{m\in N}$ é uma seqüência limitada em W. Como $W \subset L^p(0,T;L^p(\Omega))$ compactamente, concluímos que existe subseqüência, ainda denotada por (u_m) e $u \in W$ tais que:

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W \tag{1.14}$$

e

$$u_m \to u \quad \text{em} \quad L^p(0,T;L^p(\Omega)). \tag{1.15}$$

Da limitação de $-\Delta_p$ concluímos que existe $\xi \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ tal que

$$-\Delta_p u_m \rightharpoonup \xi \quad \text{em} \quad L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{1.16}$$

Por outro lado segue de (1.5) e de (1.6) que podemos definir o operador de Nemytskii, associado à g_ℓ, sobre $L^{ps/(p-2)}(0,T;L^{ps/(p-2)}(\Omega))$ com valores em $L^{p/(p-2)}(0,T;L^{p/(p-2)}(\Omega))$ e que este é um operador contínuo de modo que de (1.3) e (1.15) podemos concluir que

$$N_{g_\ell}(u_m) \to N_{g_\ell}(u) \quad \text{em} \quad L^{p/(p-2)}(0,T;L^{p/(p-2)}(\Omega)).$$

Novamente usando (1.3) e também usando (1.14) concluímos que

$$N_{g_\ell}(u_m)\frac{\partial u_m}{\partial x} \rightharpoonup N_{g_\ell}(u)\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{em} \quad L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)) \tag{1.17}$$

e conseqüentemente esta convergência fraca se dá também em $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$.

Tomando-se $\varphi \in C_0^\infty([0,T])$ e $e_i \in X^m$, concluímos à partir de (P^m) que:

$$\int_0^T (u_m'(t), e_i)\varphi(t)dt + \int_0^T (-\Delta_p u_m(t), e_i)\varphi(t)dt =$$
$$\int_0^T (h(t), e_i)\varphi(t)dt + \int_0^T (N_g(u_m(t))\frac{\partial u_m}{\partial x}(t), e_i)\varphi(t)dt.$$

Passando o limite quando $m \to \infty$, usando (1.14) à (1.17) e o fato de que $\{e_i\}_{i\in N}$ é uma base de $W_0^{1,p}(\Omega)$, concluímos que

$$u_t + \xi = N_g(u)\frac{\partial u}{\partial x} + h \quad \text{em} \quad L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{1.18}$$

Procedendo como no Teorema 5.1 do Capítulo 2, concluímos que $u(0) = u(T)$ e que $\xi = -\Delta_p u$, como queríamos.

Para o caso $s = p-2$, é suficiente garantirmos que c_3, dado em (1.10), seja positivo que o resto da demonstração segue como no caso $1 \le s < p-2$. (Lembramos que $c_3 = (1 - (\varepsilon^p + c_2 k\varepsilon^{p/2} + c_1 k^{s+1}))$ onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $c_1 = C(1 + |\Omega|^{sp/(p-2)(s-1)})$, $c_2 = C|\Omega|^{ps/(p-2)(s-1)}$ e $C = 2\max_{\ell=1,\dots,N}\{C_\ell\}$). Assim se C_ℓ for suficientemente pequeno, para todo $\ell = 1\dots N$, então c_3 será positivo, como queríamos.

Finalmente, para que possamos obter soluções fortes para (1.1) basta que $g(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, já que $h \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

Se $1 \le s \le \dfrac{p-2}{2}$ então $\dfrac{p}{s} \ge \dfrac{2p}{p-2}$ e, conseqüentemente, $L^{p/s}(0,T; L^{p/s}(\Omega)) \subset L^{2p/(p-2)}(0,T; L^{2p/(p-2)}(\Omega))$. Como $s < p-2$, então (1.1) tem uma solução fraca $u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ e conseqüentemente $N_{g_\ell}(u) \in L^{2p/(p-2)}(0,T; L^{2p/(p-2)}(\Omega))$. Portanto, obtemos $N_{g_\ell}(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_\ell} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ como queríamos. □

Observação: Se no Teorema 1.1 trocarmos $-\Delta_p$ por qualquer dos operadores fornecidos pela Observação 3.4 do Capítulo 2 então este ainda será válido.

References

[1] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] H. BREZIS, *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, Notes of Mathematics 50, North Holland Mathematics Studies, 1973.

[3] R. DAUTRAY, J.L. LIONS, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Evolution Problems* I, vol. 5, Springer Verlag, 1992.

[4] K. DEIMLING, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer Verlag, 1980.

[5] M.J. ESTEBAN, *On Periodic Solutions of Superlinear Parabolic Problems*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 293, n. 1, 1986.

[6] J. HALE, *Ordinary Differential Equations-Pure and Applied Mathematics*, vol. XXI, Wisley - Interscience, 1969.

[7] P. HESS, *On Positive Solutions of Superlinear Periodic Parabolic Problems*, Lecture Notes in Math., Springer, 1076.

[8] B. KAWOHL, R. RÜHL, *Periodic Solutions of Nonlinear Heat Equations under discontinuous Boundary Conditions*, Lecture Notes in Math. 1017, Springer Verlag, 1983.

[9] P. LE TALLEC, *Numerical Analysis of Viscoelastic Problems*, RMA 15, Masson, Springer Verlag, 1990.

[10] J.L. LIONS, *Quelques Méthodes de Resolution de Problèmes aux Limites Non Lineaires*, Dunot Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[11] A. PAZY, *Semigroups of nonlinear contractions and their asymptotic Behaviour, in R.J. Knops, Nonlinear Analysis and Mechanics*, Heriot-Watt Symposium, vol. III, Research Notes in Mathematics, 30, Pitman, 1979.

[12] A. PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 44, Springer Verlag, 1983.

[13] H.L. ROYDEN, *Real Analysis*, 2nd edition, MacMillan Co., 1968.

[14] W.A. STRAUSS, *The Energy Method in Nonlinear Partial Differential Equations*, Notas de Matemática n. 47, IMPA, 1969.

[15] P. TOLKSDORF, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J.D.E., vol. 51, 1984.